

Master Sciences de l'Ingénieur
option MIS139

=====

**Modèles géométriques pour la maîtrise
des spécifications en conception du
couple produit-processus**

Pierre BOURDET (février 2006)

ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN
61 avenue du Président Wilson
94235 CACHAN CEDEX

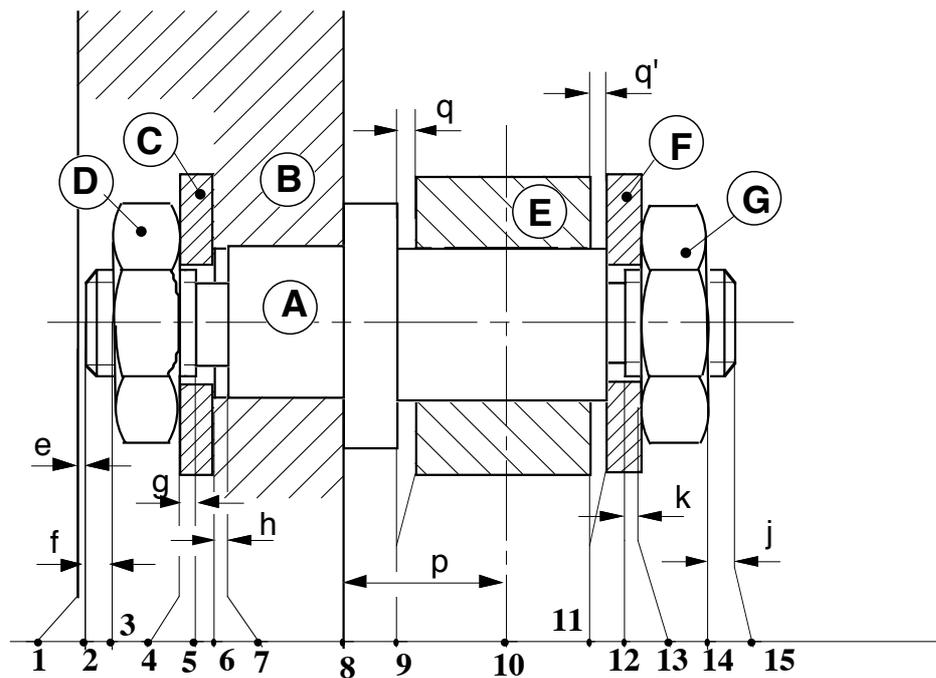
MODELES GEOMETRIQUES POUR LA MAITRISE DES SPECIFICATIONS EN CONCEPTION DU COUPLE PRODUIT-PROCESSUS

Ce polycopié est relatif au cours de l'option "Outils et méthodes pour l'élaboration du processus de fabrication" du master Sciences de l'Ingénieur spécialité Mécanique et Ingénierie des Systèmes (MIS). Il s'adresse à des étudiants ayant un pré-requis dans la lecture d'une tolérance géométrique normalisée ISO, dans la mesure sur machine à mesurer tridimensionnelle et dans la démarche générale de conception d'un mécanisme et de la réalisation d'une pièce mécanique. Il a pour but d'apporter les connaissances minimales pour comprendre la problématique géométrique des modèles de cotation et apporter des méthodologies permettant la synthèse, l'analyse et l'identification des chaînes de cotes (12h de cours, 12h de TD et 16h de TP).

| | page |
|--|-----------|
| <u>PARTIE 1</u> Chaîne de cotes unidirectionnelles | |
| CHAP. 1 : Cotes unidirectionnelles définitions et modèles..... | 1 |
| 11 Modélisation de la géométrie réelle des pièces | 3 |
| 12 Définitions..... | 4 |
| 13 Opérations sur les cotes réelles..... | 4 |
| 14 Images d'une cote réelle..... | 6 |
| 15 Opérations sur les images des cotes réelles..... | 8 |
| CHAP. 2 : Exemple de chaîne de cotes fonctionnelles | 11 |
| 21 Modélisation des fonctions d'un mécanisme : | 11 |
| 22 Réalisation des conditions fonctionnelles..... | 12 |
| CHAP. 3 : Chaîne de cotes de fabrication (Modèle des Δl) | 16 |
| 31 Modélisation géométrique des moyens de production..... | 16 |
| 32 Intervalle de tolérance Δl_i | 17 |
| 321 Identification des dispersions aléatoires et systématiques..... | 17 |
| CHAP. 4 : Chaîne de cotes de fabrication (Mode opératoire) | 22 |
| 41 Graphe de fabrication, | 22 |
| 42 Répartition optimale des tolérances..... | 24 |
| 43 Choix des Cotes fabriquées..... | 26 |
| <u>PARTIE 2</u> Les montages d'usinage | 29 |
| CHAP. 5 : Les montages d'usinages | 31 |
| 51 Fonctions d'un montage d'usinage..... | 31 |
| 52 Typologie des montages d'usinage..... | 31 |
| 53 Modèle isostatique | 34 |
| 54 Modèle « isostatique » avec prise ne compte des défauts..... | 39 |

| | |
|---|-----------|
| <u>PARTIE 3</u> Identification des paramètres de réglage en production | 45 |
| Chap.6 : Identification des « cotes de réglage » | 47 |
| 61 Problème posé..... | 31 |
| 62 Rappel sur le modèle de définition d'une entité géométrique | 48 |
| 63 Association d'une forme géométrique idéale à un ensemble de point..... | 49 |
| 64 Identification des « cotes de réglage » | 51 |
| <u>PARTIE 4</u> Compensation des défauts géométrique des machines..... | 59 |
| Chap.7 : Compensation numérique des défauts géométriques d'un mécanisme..... | 61 |
| 71 Introduction | 61 |
| 72 Principe d'Abbe..... | 61 |
| 73 Modélisation des « 21 défauts » d'une MMT | 59 |
| 74 Methode de surveillance des la qualité géométrique d'un MMT | 61 |
| 741 Cas des machines à mesurer tridimensionnelles..... | 64 |
| 742 Cas des machines-outils à commande numériques | 67 |
| <u>PARTIE 5</u> Chaînes de cote 3D | |
| CHAP. 8 : Chaînes de cotes 3D | 71 |
| 81 Etablissement des relations de comportement d'un mécanisme..... | 73 |
| 82 Lois de comportement en écriture formelle d'un mécanisme composé de pièces rigides..... | 75 |
| 83 Exemple sur un cas simple : mise en position d'un arbre sur un Vé..... | 76 |
| <u>BIBLIOGRAPHIE</u>..... | 85 |
| <u>ANNEXE</u> Présentation du torseur de petit déplacement..... | 87 |

Partie 1 : Chaîne de cotes unidirectionnelles



Chap 1 : Cotes unidirectionnelles (Définitions et modèles)

=====

1.1 MODELISATION DE LA GEOMETRIE REELLE DES PIECES

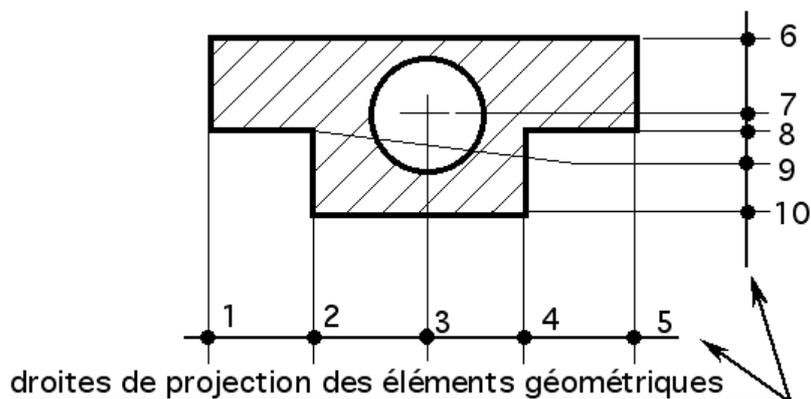
Une pièce est ici observée suivant les directions principales de sa géométrie, les directions correspondent en général aux différentes vues et coupes du dessin de définition. A une pièce sera associé (suivant les besoins) un ensemble de directions, chaque direction est ensuite traitée indépendamment des autres directions.

Une direction est définie par une droite de projection sur laquelle chaque surface, ligne ou point est représenté par un point.

Le point est représentatif de la géométrie réelle de la pièce, sa construction est obtenue par des hypothèses propres à chaque cas de figure. A titre d'exemple, on peut citer quelques constructions les plus courantes :

- cas d'une surface plane : la surface réelle est dans un premier temps modélisée par un ensemble de points appartenant tous à un plan parfait perpendiculaire à la droite de projection, dans ce cas tous les points de la surface se projettent en un point unique représentatif de la surface ;
- autre cas d'une surface plane : la surface réelle est dans un premier temps modélisée par un ensemble de points appartenant à la surface réelle. Le point représentatif de la surface correspond au point le plus à gauche (ou le plus à droite) projeté orthogonalement sur la droite de projection ;
- cas d'une surface cylindrique, la surface réelle est modélisée par un cylindre parfait d'axe perpendiculaire à la droite de projection. Le point représentatif de la surface réelle sera dans ce cas la projection orthogonale d'un point de l'axe sur la droite d'observation.

On peut remarquer que toutes ces "hypothèses de construction" permettent d'apporter un sens physique au point représentatif de la surface.



Les surfaces, les lignes, les axes et les centres, sont tous modélisés par des points. Les définitions des termes dimension, cote réelle et cote, proposées dans ce premier chapitre (§1.2), sont liées à des bi-points. Bien que leur écriture soit conforme à l'ISO 406, ils servent à proposer un modèle de simulation unidirectionnelle d'un assemblage de pièces ou d'un processus de fabrication. Ce ne sont pas des tolérances dimensionnelles (linéaires ou angulaires) au sens de la norme ISO 8015 qui limitent uniquement des dimensions locales réelles (voir cours sur le tolérancement) entre deux points avec de la matière en vis-à-vis.

1.2. DEFINITIONS

1.2.1 Définitions d'une dimension : $d_{i,j}^k$

A toute mesure, dans un système d'unité, on fait correspondre un élément de l'ensemble des nombres réels R . Cette mesure est faite sur une pièce ou un assemblage de pièces désigné par l'exposant k , entre deux points i et j définis géométriquement sur une droite. Une dimension répond donc à la définition mathématique du bipoint.

Une dimension $d_{i,j}^k$ c'est :

- une grandeur mesurée représentée par une valeur (élément de R) notée $g_{i,j}$
- une position géométrique notée par les indices i,j correspondant aux indices i et j des deux points considérés.
- une pièce ou un assemblage désigné par l'exposant k

1.2.2. Définitions d'une cote réelle $C^*_{i,j}$:

Une cote réelle $C^*_{i,j}$ est une suite **ordonnée** d'un nombre **fini** de dimensions.

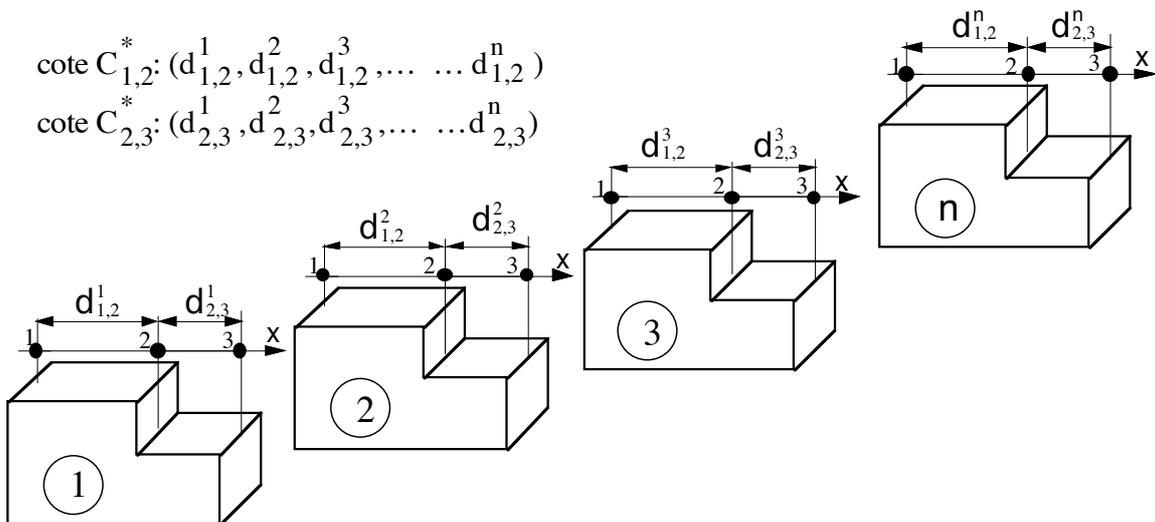
i,j est l'indice définissant la position géométrique de la cote réelle.

$$C^*_{i,j} : (d_{i,j}^1, d_{i,j}^2, d_{i,j}^3, \dots, \dots, d_{i,j}^p)$$

Exemples de cotes réelles :

$$\text{cote } C^*_{1,2} : (d_{1,2}^1, d_{1,2}^2, d_{1,2}^3, \dots, \dots, d_{1,2}^n)$$

$$\text{cote } C^*_{2,3} : (d_{2,3}^1, d_{2,3}^2, d_{2,3}^3, \dots, \dots, d_{2,3}^n)$$



1.3. OPERATIONS SUR LES COTES REELLES

1.3.1 Somme de cotes réelles

Soient p cotes réelles sur n pièces ou assemblages formant une chaîne fermée de p cotes réelles :

$$\text{Cote } C_{1,2}^* : (d_{1,2}^1, d_{1,2}^2, d_{1,2}^3, \dots, d_{1,2}^k, \dots, d_{1,2}^P)$$

$$\text{Cote } C_{2,3}^* : (d_{2,3}^1, d_{2,3}^2, d_{2,3}^3, \dots, d_{2,3}^k, \dots, d_{2,3}^P)$$

$$\text{Cote } C_{i,j}^* : (d_{i,j}^1, d_{i,j}^2, d_{i,j}^3, \dots, d_{i,j}^k, \dots, d_{i,j}^P)$$

$$\text{Cote } C_{n,1}^* : (d_{n,1}^1, d_{n,1}^2, d_{n,1}^3, \dots, d_{n,1}^k, \dots, d_{n,1}^P)$$

Toute dimension $d_{i,j}^k$ d'une cote réelle $C_{i,j}^*$ appartenant à une pièce ou à un assemblage k, peut être déduite par la "somme sur les bipoints" des dimensions de la chaîne fermée de cotes appartenant à la même pièce ou au même assemblage k. En effet sur chaque pièce ou assemblage k, il est toujours possible de calculer une dimension à partir des autres dimensions de la chaîne fermée de dimensions (opération sur des bipoints).

Exemple : avec une chaîne fermée de 3 cotes $C_{1,2}^*$, $C_{2,3}^*$, $C_{3,1}^*$. Sur la k^{ème} pièce, la valeur $g_{i,j}$ de l'une des trois dimensions $d_{1,2}^k$, $d_{2,3}^k$, et $d_{3,1}^k$ peut-être déduite des valeurs des deux autres dimensions.

$$g_{1,3} = g_{1,2} + g_{2,3}$$

$$g_{1,2} = g_{1,3} - g_{2,3}$$

$$g_{2,3} = g_{1,3} - g_{1,2}$$

On peut donc écrire sur une pièce ou un assemblage trois relations entre les dimensions :

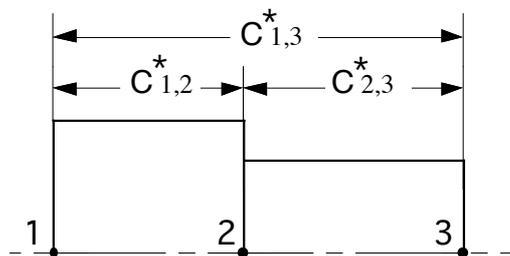
$$d_{1,3}^k = d_{1,2}^k \oplus d_{2,3}^k$$

$$d_{1,2}^k = d_{1,3}^k \oplus d_{3,2}^k$$

$$d_{2,3}^k = d_{2,1}^k \oplus d_{1,3}^k$$

le symbole \oplus et un OU exclusif sur les dimensions (union – intersection des 2 dimensions)

et sur l'ensemble des pièces ou assemblage trois relations entre les cotes réelles :



$$C_{1,3}^* = C_{1,2}^* \oplus C_{2,3}^*$$

$$C_{1,2}^* = C_{1,3}^* \oplus C_{3,2}^*$$

$$C_{2,3}^* = C_{2,1}^* \oplus C_{1,3}^*$$

où le symbole \oplus (OU exclusif) représente la « somme » de deux cotes réelles.

Conséquence :

- La somme de deux cotes identiques $C_{ij}^* \oplus C_{ij}^* = \Phi$ donne un ensemble vide. En effet chaque somme des dimensions ordonnées donne une union moins l'intersection vide.
 $C_{ij}^* \oplus C_{ij}^* : (d_{ij}^1 \oplus d_{ij}^1, d_{ij}^2 \oplus d_{ij}^2, \dots, d_{ij}^n \oplus d_{ij}^n)$
- $C_{ij}^* = C_{ij}^*$ n'a un sens que si les deux cotes ont les mêmes indices i et j

1.3.2 Inclusion d'une dimension ou d'une cote réelle

Inclusion d'une dimension $d_{i,j}^k$ ou d'une cote réelle $C_{i,j}^*$ dans une cote réelle $C_{i,j}^*$:

- $d_{i,j}^k \subset C_{i,j}^*$

La dimension $d_{i,j}^k$ sera incluse dans la cote réelle $C_{i,j}^* : (d_{i,j}^1, d_{i,j}^2, d_{i,j}^3, \dots, d_{i,j}^p)$ si $d_{i,j}^k$ a sa valeur $g_{i,j}^k$ comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs prises par les dimensions de la cote $C_{i,j}^* : g_{i,j}^l \min i \leq g_{i,j}^k \leq g_{i,j}^m \max i$.

- $C_{i,j}^* \subset C_{i,j}^*$

Une cote $C_{i,j}^*$ sera incluse dans une cote $C_{i,j}^*$ si toutes les dimensions de la cote $C_{i,j}^*$ sont incluses dans la cote $C_{i,j}^*$.

1.4. IMAGES D'UNE COTE REELLE

L'image d'une cote réelle est un représentant résultant d'une des applications définies ci-dessous :

Exemples d'images de cotes réelles les plus utilisées :

1.4.1 L'image de la cote réelle est donnée par la plus grande des dimensions $d_{i,j}^k$ que l'on appelle cote maxi notée $C_{i,j} \max i$ (Exemple : 80,2 maxi)

1.4.2 L'image de la cote réelle est donnée par la plus petite des dimensions $d_{i,j}^k$ que l'on appelle cote mini notée $C_{i,j} \min i$ (Exemple : 80 mini)

1.4.3 L'image de la cote réelle est donnée par une combinaison judicieuse de cote maxi, cote mini, cote moyenne et intervalle de tolérance.

Avec les relations suivantes :

cote moyenne: $C_{i,j} \text{moyen} = (C_{i,j} \max i + C_{i,j} \min i)/2$

Intervalle de tolérance $IT_{i,j} = C_{i,j} \max i - C_{i,j} \min i$

cote maxi : $C_{i,j} \max i = C_{i,j} \text{moyen} + IT_{i,j}/2$

cote mini : $C_{i,j} \min i = C_{i,j} \text{moyen} - IT_{i,j}/2$

Exemples de notation:

$$C_{i,j} \min i^0 \quad ; \quad C_{i,j} \text{moyen}^{\pm \frac{IT_{i,j}}{2}} \quad ; \quad C_{i,j} \max i^{-IT_{i,j}} \quad (\text{Exemples : } 80^0 \quad ; \quad 80,1^{\pm 0,1} \quad ; \quad 80,2^{+0,2})$$

1.4.4 L'image de la cote réelle est donnée par une cote nominale associée à un écart maxi et un écart mini

$$C_{i,j} \text{ nominale} \begin{matrix} +0,15 \\ e_{\text{max } i} \\ -0,05 \\ e_{\text{min } i} \end{matrix} \quad (\text{Exemples : } 80,05)$$

1.4.5 L'image de la cote réelle est donnée par une définition statistique :

- dimension moyenne notée cote statistique moyenne $\overline{C_{i,j}^*}$ et l'écart type $\sigma_{i,j}^*$ de la variation des n^* dimensions :

$$\overline{C_{i,j}^*} = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} d_{i,j}^k}{n^*} \quad \sigma_{i,j}^* = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{k=n} (d_{i,j}^k - \overline{C_{i,j}^*})^2}{n^*}}$$

- l'intervalle de confiance de la cote réelle est défini pour un risque α par la relation :

$$C_{i,j}^* = \overline{C_{i,j}^*} \pm t_\alpha \sigma_{i,j}^* \quad \text{ou } t_\alpha \text{ est un coefficient fonction de la loi de distribution de la population.}$$

Le coefficient t_α dans le cas d'une loi Normale (centrée) vaut :

$$t_\alpha = 3 \text{ pour un risque } \alpha \text{ de } 0,28\% \text{ d'être en dehors de l'intervalle de confiance } (\beta=99,72\%)$$

$$t_\alpha = 2 \text{ pour un risque } \alpha \text{ de } 4,6\% \text{ d'être en dehors de l'intervalle de confiance } (\beta=95,4\%)$$

$$t_\alpha = 1 \text{ pour un risque } \alpha \text{ de } 31,8\% \text{ d'être en dehors de l'intervalle de confiance } (\beta=68,2\%)$$

si α représente le risque pour une dimension d'être en dehors de l'intervalle, β représente le % de « chance » pour une dimension d'être comprises dans l'intervalle.

- le plus souvent la cote moyenne $\overline{C_{i,j}^*}$ et l'écart type $\sigma_{i,j}^*$ sont estimés à partir d'un échantillon de n dimensions.

Le tableau ci-dessous donne, à partir de la moyenne $\overline{C_{i,j}}$ et de l'écart type $\sigma_{i,j}$ d'un échantillon, l'estimation de la moyenne $\overline{C_{i,j}^*}$ et de l'écart type $\sigma_{i,j}^*$ de la population.

| | | |
|---|---|---|
| Soit un échantillon de n dimensions $d_{i,j}$ | | |
| La moyenne de l'échantillon est: $\overline{C_{i,j}} = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} d_{i,j}^k}{n}$ | | L'écart type de l'échantillon est: $\sigma_{i,j} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{k=n} (d_{i,j}^k - \overline{C_{i,j}})^2}{n}}$ |
| La moyenne estimée de la population est : $\overline{C'_{i,j}} = \overline{C_{i,j}}$ | L'écart type s de l'ensemble des moyennes estimées est : $s = \frac{\sigma_{i,j}}{\sqrt{n}}$ | Intervalle de confiance de la moyenne estimée [*] $\overline{C'_{i,j}} = \overline{C_{i,j}} \pm t_\alpha \frac{\sigma_{i,j}}{\sqrt{n}}$ |
| L'écart type σ' estimé de la population est : $\sigma' = \sigma_{i,j} \sqrt{\frac{n}{n-1}}$ | L'écart type de l'ensemble des écarts types estimés est : $\sigma(\sigma') = \frac{\sigma_{i,j}}{\sqrt{2n}}$ | Intervalle de confiance de l'écart type estimé [*] $\sigma' = \sigma_{i,j} \sqrt{\frac{n}{n-1}} \pm t_\alpha \frac{\sigma_{i,j}}{\sqrt{2n}}$ |
| [*] quelque soit la distribution de la population l'ensemble des moyennes et l'ensemble des écart-types suivent une loi normale (ou de Laplace - Gauss) donnée sous forme de tables en fin de poly. | | |

La cote estimée pour un risque α est : $C_{ij} = \overline{C_{ij}} \pm t_\alpha \cdot \sigma'$ avec t_α défini par la loi de distribution de la population ($t_{0,028} = 3$ pour une loi normale et $t_\alpha = \sqrt{3}$ pour une loi équiprobable).

1.5. OPERATIONS SUR LES IMAGES DES COTES

1.5.1 Somme de cotes

Soient n cotes réelles $C_{1,2}^* \dots C_{n,1}^*$ formant une chaîne fermée de cotes :

$$\text{Cote } C_{1,2}^* : (d_{1,2}^1, d_{1,2}^2 \text{ mini}, d_{1,2}^3, \dots, d_{1,2}^6 \text{ maxi}, \dots, d_{1,2}^k)$$

$$\text{Cote } C_{2,3}^* : (d_{2,3}^1, d_{2,3}^2, d_{2,3}^3 \text{ maxi}, \dots, \dots, d_{2,3}^{k-1} \text{ mini}, d_{2,3}^k)$$

$$\text{Cote } C_{i,j}^* : (d_{i,j}^1, d_{i,j}^2, d_{i,j}^3, \dots, d_{i,j}^5 \text{ maxi}, \dots, d_{i,j}^{k-1} \text{ mini}, d_{i,j}^k)$$

$$\text{Cote } C_{n,1}^* : (d_{n,1}^1 \text{ maxi}, d_{n,1}^2, d_{n,1}^3, \dots, d_{n,1}^8 \text{ mini}, \dots, d_{n,1}^k)$$

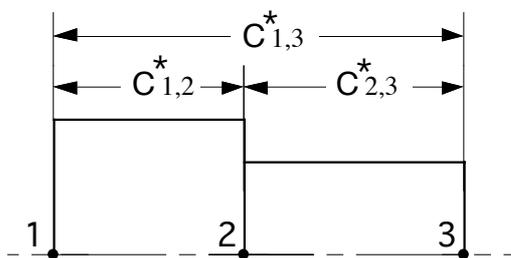
Prenons le cas où l'image de chaque cote est définie par ses cotes maxi et mini, (le raisonnement reste le même dans les cas d'images de cotes exprimées par intervalles de tolérances, cotes moyennes, cotes nominales, écarts maxi, écarts mini etc...)

L'image $C_{i,j}$ d'une cote de la chaîne ne pourra être exprimée en fonction des images des autres cotes de la chaîne que s'il existe une probabilité suffisante, pour que sur une pièce (ou un assemblage), les cotes maxi et mini se combinent judicieusement pour donner la cote maxi et la cote mini de la cote $C_{i,j}$.

Cette hypothèse revient à dire que dans une chaîne fermée de n cotes, l'image d'une cote $C_{i,j}$ ne pourra être déduite des autres cotes maxi et mini de la chaîne, que si elles sont statistiquement indépendantes.

En conséquence, s'il était possible sur une chaîne fermée de n cotes réelles, d'écrire n relations permettant de déduire l'une des n cotes réelles à partir des n-1 cotes réelles restantes, dans une chaîne fermée de n cotes, il n'existe au plus qu'une seule relation entre l'image d'une cote résultante et les n-1 images de cotes statistiquement indépendantes.

Exemple d'une chaîne fermée de 3 cotes :



Sur les cotes réelles, 3 relations :

$$C_{1,3}^* = C_{1,2}^* \oplus C_{2,3}^*$$

$$C_{1,2}^* = C_{1,3}^* \oplus C_{3,2}^*$$

$$C_{2,3}^* = C_{2,1}^* \oplus C_{1,3}^*$$

Sur les images des cotes, en vérifiant l'hypothèse que les cotes $C_{1,2}^*$ et $C_{2,3}^*$ sont indépendantes, une seule relation est possible :

$$\text{Image de } C_{1,3}^* = \text{Image } C_{1,2}^* \oplus \text{Image } C_{2,3}^*$$

1.5.2. Représentation vectorielle d'une chaîne "d'images" de cotes

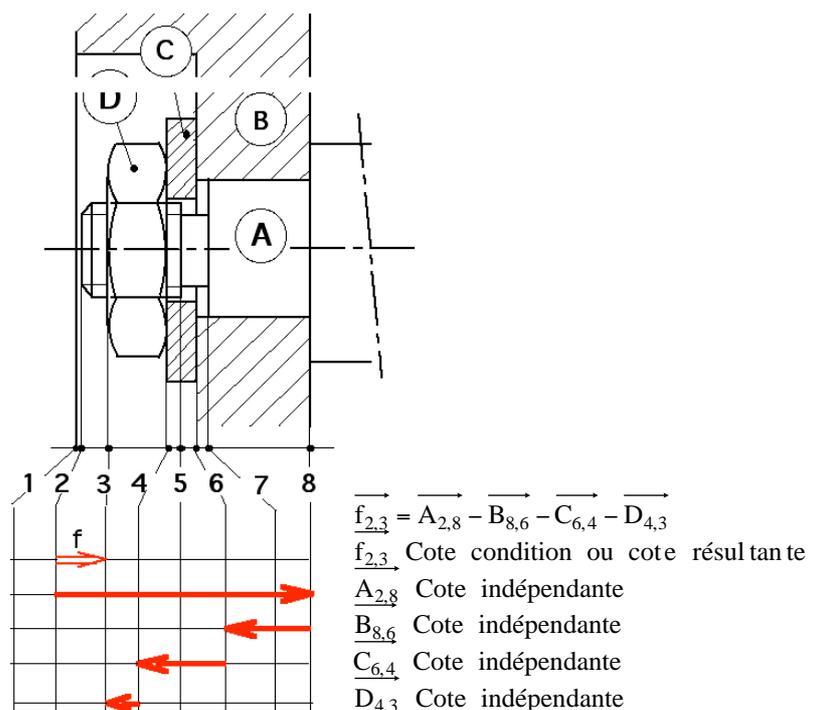
Afin de systématiser la mise en équation des relations entre les images de cotes de nombreux auteurs ont mis au point différentes méthodes de représentation des chaînes de cotes. Parmi celles-ci on peut retenir une représentation vectorielle qui suit les règles générales suivantes :

- la cote condition désigne la cote dépendante, elle est représentée par un vecteur symbolisé par une flèche à double trait,
- les cotes indépendantes sont représentées par des vecteurs symbolisés par des flèches à simple trait,
- la cote condition est le vecteur résultant de la somme vectorielle des cotes indépendantes de la chaîne.

De cette représentation, il est alors simple d'établir les relations entre les dimensions et les cotes maxi et mini.

Par exemple sur l'assemblage des 4 pièces A, B, C, D :

La condition fonctionnelle technique : le nombre de filets en prise avec l'écrou doit être suffisant ; se traduit par une condition sur la cote $C_{2,3}$ dont la dimension minimum doit être supérieure à une valeur fixée à la conception du produit.



La condition d'interchangeabilité impose que cette condition fonctionnelle soit réalisée à partir de "cotes fonctionnelles" réalisées sur les différentes pièces de l'assemblage.

La cote condition sera ainsi la résultante des cotes fonctionnelles. L'application d'une relation de chaîne de cotes impose que les cotes fonctionnelles soient indépendantes entre elles. Cette condition d'indépendance sera toujours réalisée s'il n'existe qu'une seule cote fonctionnelle par pièce et que chaque pièce soit réalisée indépendamment les unes des autres (condition d'interchangeabilité).

On peut écrire les relations suivantes :

Relation vectorielle :

$$\vec{f}_{2,3} = \vec{A}_{2,8} + \vec{B}_{8,6} + \vec{C}_{6,4} + \vec{D}_{4,3}$$

Relation vectorielle projetée sur x (relation entre les valeurs des dimensions) :

$$f_{2,3} = a_{2,8} - b_{8,6} - c_{6,4} - d_{4,3}$$

Relations entre les valeurs des cotes maxi et mini :

$$f_{2,3 \text{ maxi}} = A_{2,8 \text{ maxi}} - B_{8,6 \text{ mini}} - C_{6,4 \text{ mini}} - D_{4,3 \text{ mini}}$$

$$f_{2,3 \text{ mini}} = A_{2,8 \text{ mini}} - B_{8,6 \text{ maxi}} - C_{6,4 \text{ maxi}} - D_{4,3 \text{ maxi}}$$

En faisant l'hypothèse que les dimensions moyennes sont centrées sur les intervalles de tolérance :

Relation entre les intervalles de tolérances :

$$IT f_{2,3} = IT A_{2,8} + IT B_{8,6} + IT C_{6,4} + IT D_{4,3}$$

Relations entre les cotes moyennes et les intervalles de tolérances :

$$f_{2,3 \text{ maxi}} = A_{2,8 \text{ moy}} + IT A_{2,8} / 2 - B_{8,6 \text{ moy}} - IT B_{8,6} / 2 - C_{6,4 \text{ moy}} - IT C_{6,4} / 2 - D_{4,3 \text{ moy}} - IT D_{4,3} / 2$$

$$f_{2,3 \text{ mini}} = A_{2,8 \text{ moy}} - IT A_{2,8} / 2 + B_{8,6 \text{ moy}} + IT B_{8,6} / 2 + C_{6,4 \text{ moy}} + IT C_{6,4} / 2 + D_{4,3 \text{ moy}} + IT D_{4,3} / 2$$

Relations entre les écarts types :

$$\sigma^2(f_{2,3}) = \sigma^2(A_{2,8}) + \sigma^2(B_{8,6}) + \sigma^2(C_{6,4}) + \sigma^2(D_{4,3})$$

etc...

Chap 2 : Exemple de chaîne de cotes fonctionnelles

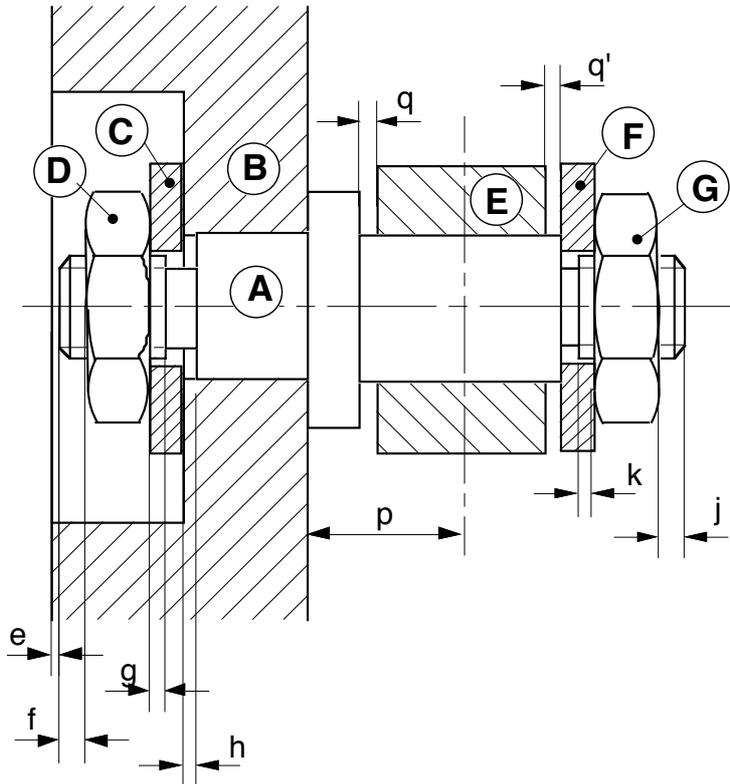
=====

2.1. MODELISATION DES FONCTIONS D'UN MECANISME

La conception d'un produit s'effectue autour des fonctions qu'il doit remplir. L'avant-projet permet d'exprimer ces fonctions sous formes de conditions fonctionnelles.

Dans une approche unidirectionnelle, les conditions fonctionnelles géométriques seront modélisées sur le dessin d'ensemble par des distances entre des bipoints limités par des bornes maxi ou (et) mini

Par exemple le bon fonctionnement du mécanisme suivant exige :



- un jeu mini de 0,2mm entre le galet E et ses pièces voisines A et F :
Si contact entre A et E : $q'_{\text{mini}} \geq 0,2$ Si contact entre E et F : $q_{\text{mini}} \geq 0,2$
- un déplacement maxi de 1,2mm du plan de symétrie du galet E par rapport à la pièce B
 $IT p \leq 1,2$
- un dépassement de 4 mm mini des 2 têtes de filetages de l'arbre A des 2 écrous G et D
 $j_{\text{mini}} \geq 4$ $f_{\text{mini}} \geq 4$
- une longueur des deux filetages de l'arbre A suffisante pour que les deux écrous G et D soient toujours en prise sur leur filetage :
 $g_{\text{mini}} \geq 1$ $k_{\text{mini}} \geq 1$
- un serrage entre les pièces A et B
 $h_{\text{mini}} \geq 1$
- un retrait de 0,5mm mini de la tête de l'arbre A par rapport à la pièce B
 $e_{\text{mini}} \geq 0,5$

2.2. REALISATION DES CONDITIONS FONCTIONNELLES :

Dans le cas d'une fabrication de type unitaire, les conditions fonctionnelles pourraient être directement respectées. En effet il est théoriquement possible d'ajuster l'ensemble des pièces au fur et à mesure de leur fabrication, mais pour des raisons de coût et d'interchangeabilité, il est préférable de fabriquer les pièces de façon indépendante.

Le respect des conditions fonctionnelles est assuré par l'assemblage de nouvelles conditions fonctionnelles imposées sur la géométrie de chaque pièce. Les conditions fonctionnelles de l'ensemble mécanique sont ainsi transférées sur les différentes pièces. du mécanisme. On peut distinguer deux types de condition fonctionnelle : celles qui créent déjà un lien entre deux éléments géométriques appartenant à une pièce isolée et qui ne nécessitent aucun transfert, et celles qui créent un lien entre deux pièces et qui nécessite un transfert de la condition fonctionnelle.

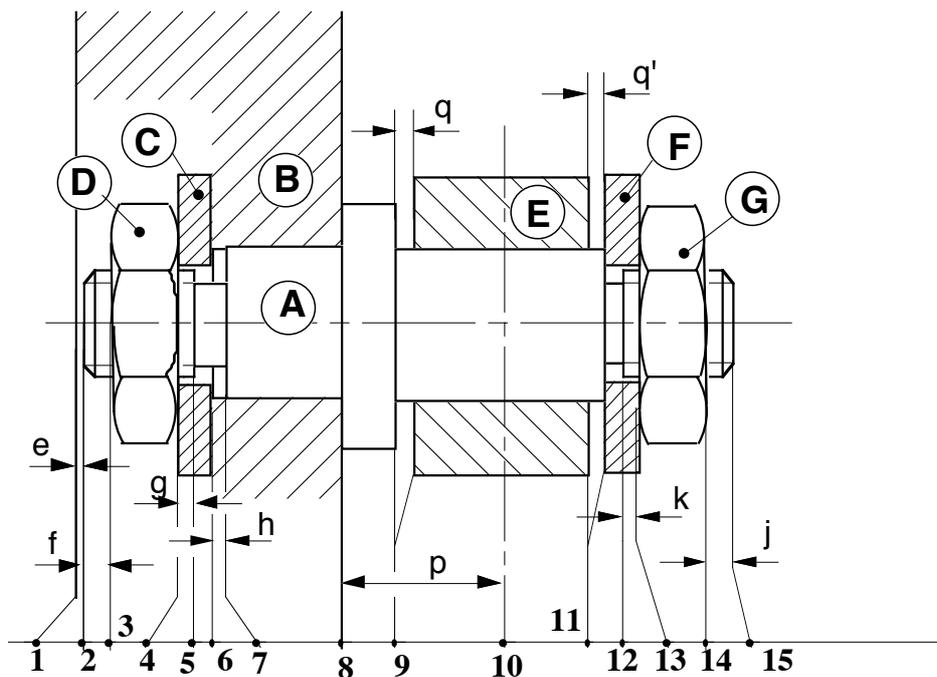
Le transfert de la condition fonctionnelle se fait en utilisant l'outil de calcul chaîne de cotes. La chaîne de cotes doit être la plus courte possible, elle est obtenue en reliant directement les surfaces de contacts des différentes pièces composant l'assemblage et concourant à la mise en place des 2 surfaces terminales de la condition fonctionnelle. On part ainsi de l'une des surfaces terminales limitant la condition fonctionnelle pour aboutir en passant de pièce en pièce à l'autre surface terminale.

2.2.1 Exemple

Convention de notation :

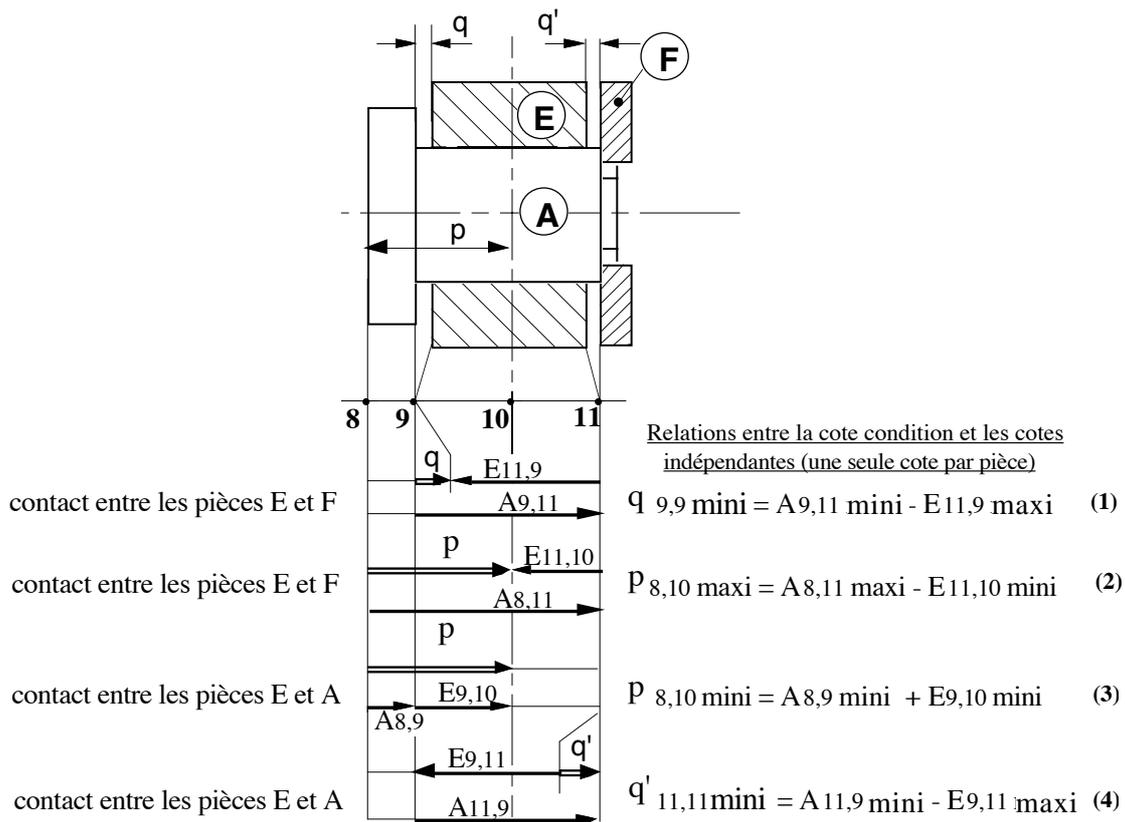
- Chaque condition fonctionnelle entre deux pièces est désignée par une lettre alphabétique minuscule.
- Chaque pièce est désignée par une lettre alphabétique majuscule.
- Les surfaces, les lignes et les points sont modélisés par des points numérotés de gauche à droite.
- lorsqu'il y a contact possible entre deux éléments géométriques (surface ligne ou point) ils seront désignés par le même numéro.

Étape 1 : Numérotation des différents points représentatifs des surfaces lignes et points :



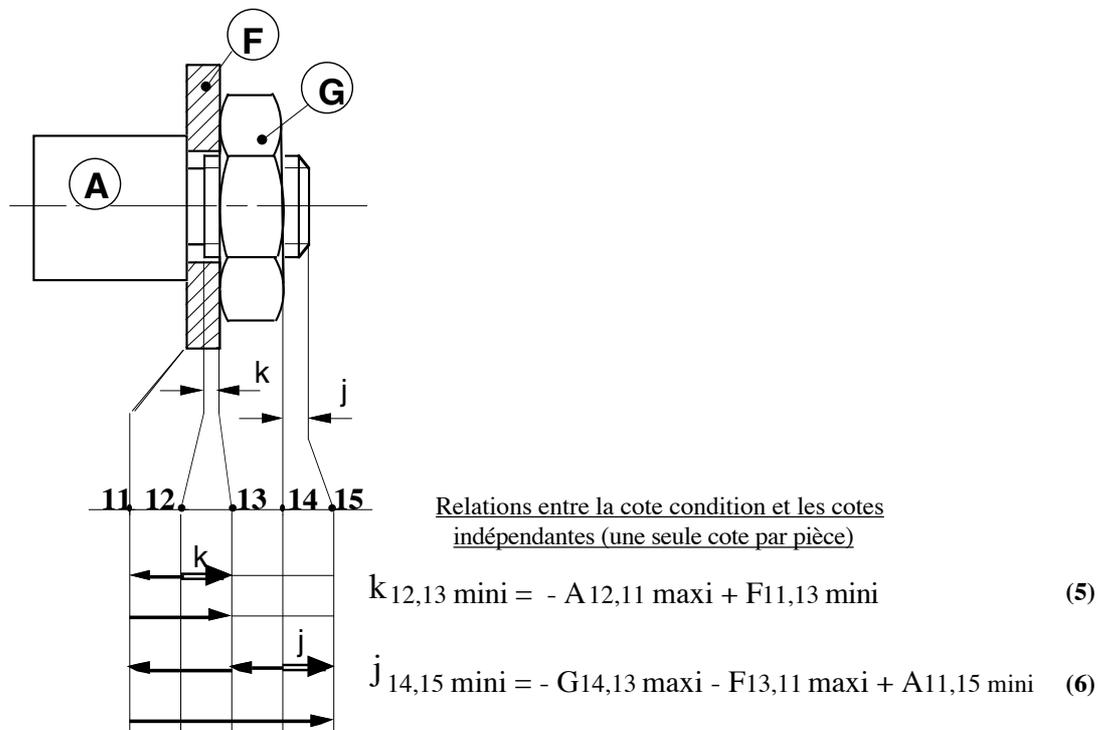
Étape 2 : Transfert des conditions fonctionnelles sur les différentes pièces :

Transfert des conditions fonctionnelles q, p et p' sur les pièces A, E, F :

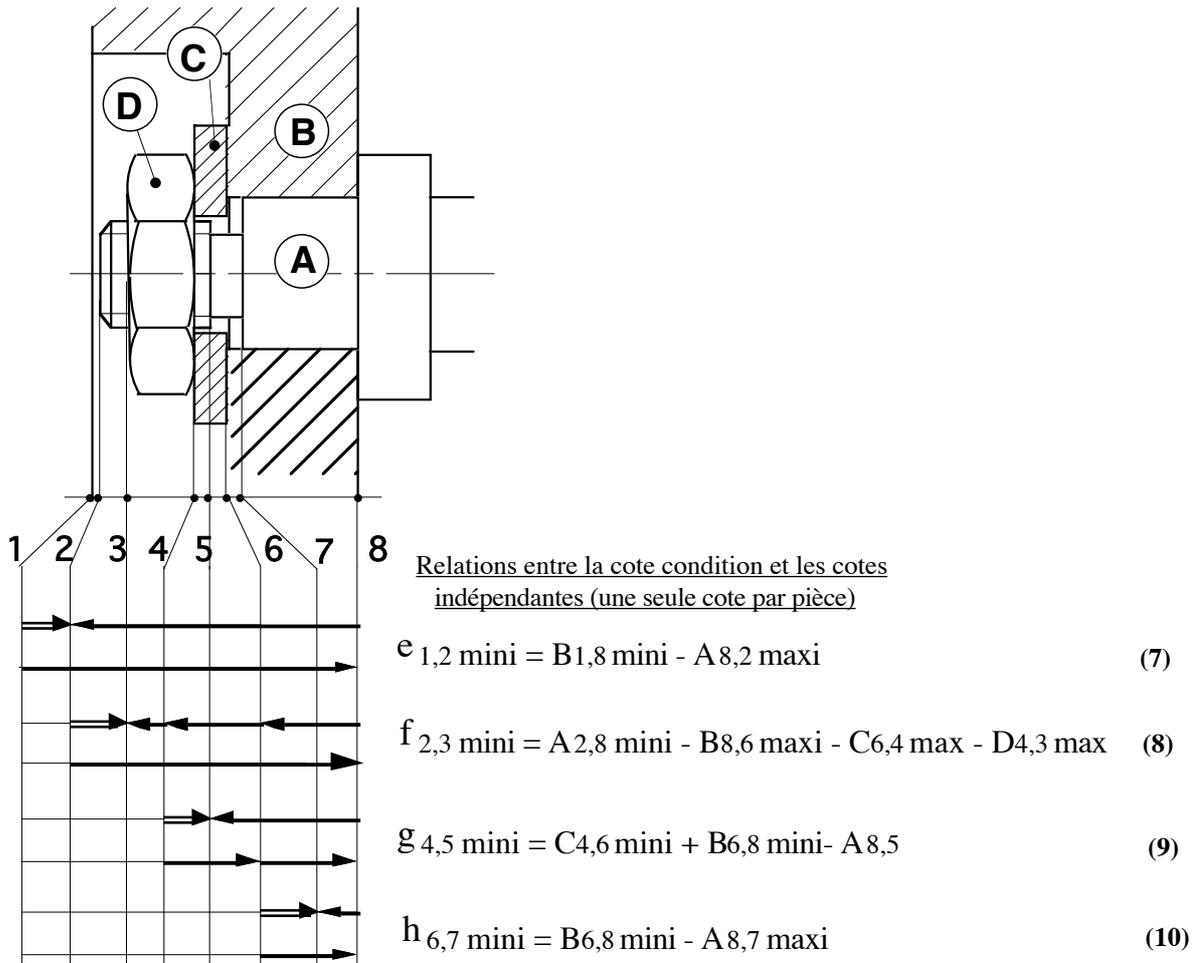


Les relations (1) et (4) peuvent être écrite sous la forme $(q+q')_{\text{mini}} = A_{9,11 \text{ mini}} - E_{9,11 \text{ maxi}}$

Transfert des conditions fonctionnelles k et j sur les pièces A, F, G :



Transfert des conditions fonctionnelles e, f, g et h sur les pièces A, B, C, D :



Étape 3 :

Les 9 conditions fonctionnelles de l'ensemble du mécanisme donnent 9 inéquations entre 19 conditions fonctionnelles transférées sur les pièces.

$$q_{9,9} \text{ mini} \rightarrow A_{9,11} \text{ mini} - E_{11,9} \text{ maxi} \geq 0,2 \quad (1)$$

$$IT p_{8,10} = p_{8,10} \text{ maxi} - p_{8,10} \text{ mini} \quad \text{avec } E_{9,11} \text{ mini} = E_{11,10} \text{ mini} + E_{9,10} \text{ mini}$$

$$IT p_{8,10} \rightarrow A_{8,11} \text{ maxi} - A_{8,9} \text{ mini} - E_{9,11} \text{ mini} \leq 1,2 \quad (2) - (3)$$

$$q'_{11,11} \text{ mini} \rightarrow A_{11,9} \text{ mini} - E_{9,11} \text{ maxi} \geq 0,2 \quad (4)$$

$$k_{12,13} \text{ mini} \rightarrow -A_{12,11} \text{ maxi} + F_{11,13} \text{ mini} \geq 1 \quad (5)$$

$$j_{14,15} \text{ mini} \rightarrow -G_{14,13} \text{ maxi} - F_{13,11} \text{ maxi} + A_{11,15} \text{ mini} \geq 4 \quad (6)$$

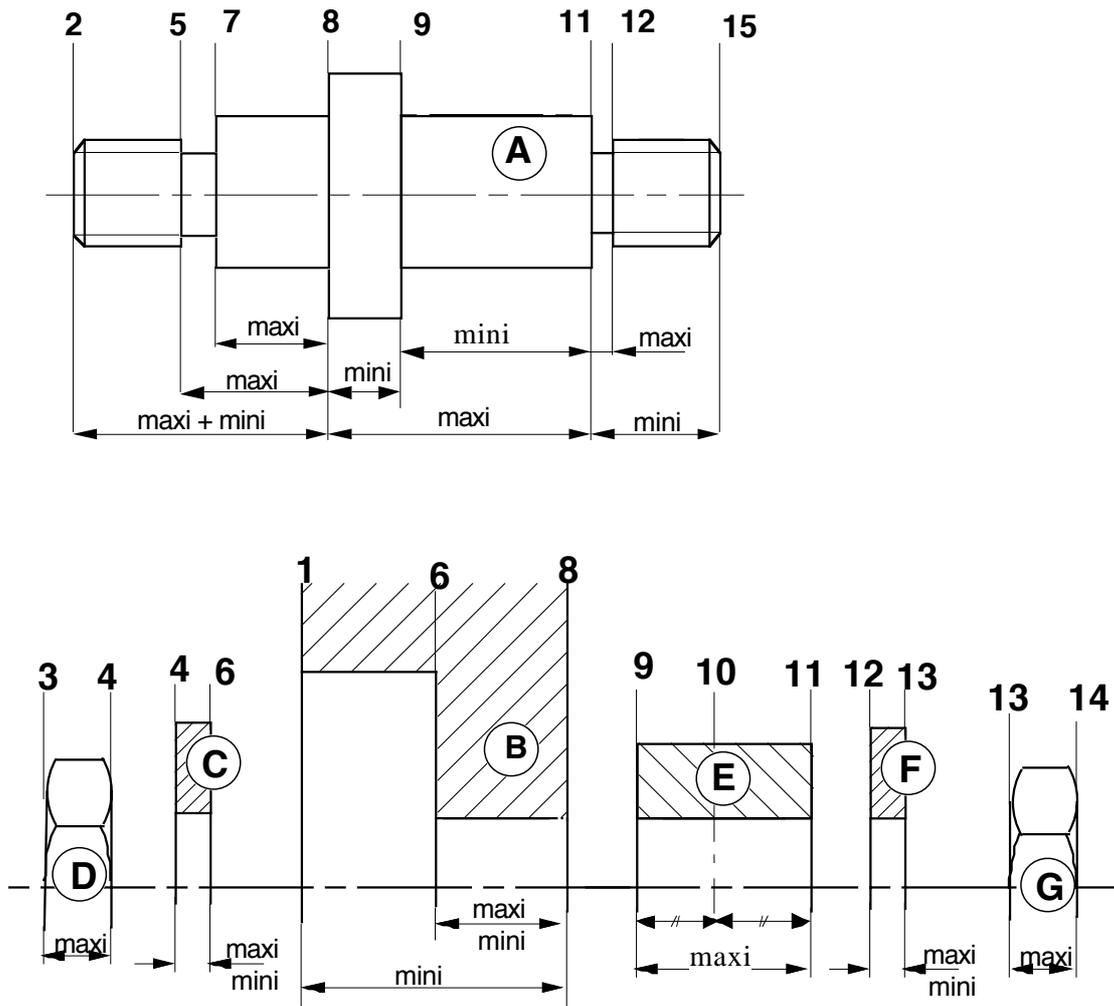
$$e_{1,2} \text{ mini} \rightarrow B_{1,8} \text{ mini} + A_{8,2} \text{ maxi} \geq 0,5 \quad (7)$$

$$f_{2,3} \text{ mini} \rightarrow A_{2,8} \text{ mini} - B_{8,6} \text{ maxi} - C_{6,4} \text{ maxi} - D_{4,3} \text{ maxi} \geq 4 \quad (8)$$

$$g_{4,5} \text{ mini} \rightarrow C_{4,6} \text{ mini} + B_{6,8} \text{ mini} - A_{8,5} \text{ maxi} \geq 1 \quad (9)$$

$$h_{6,7} \text{ mini} \rightarrow B_{6,8} \text{ mini} - A_{8,7} \text{ maxi} \geq 1 \quad (10)$$

Conditions fonctionnelles reportées sur chaque pièce :



Il existe une infinité de solutions dans l'attribution de valeurs aux 19 conditions fonctionnelles transférées sur chaque pièce. Le choix d'une solution de cotation doit prendre en compte d'autres critères et principalement les coûts de production.

Pour cela on choisit des composants du marché tolérancés sur catalogue (par exemple les deux écrous D et G), sinon le choix est fait par les experts en conception des processus de fabrication.

Nous proposons d'apporter une aide supplémentaire au dimensionnement et au tolérancement, en prenant en compte les contraintes de fabrication sous la forme de chaînes de cotes de fabrication. A partir des conditions fonctionnelles de conception, l'objectif est d'obtenir une cotation complète de chacune des pièces composant le mécanisme assemblé.

Chap 3 : Chaîne de cotes de fabrication (Modèle des Δl)

=====

31. MODELISATION GEOMETRIQUE DES MOYENS DE PRODUCTION

Une pièce fabriquée est composée de surfaces (S_u) obtenues successivement dans des repères liés aux différents moyens de production (empreinte d'une matrice d'estampage, empreinte d'un moule, bati d'une machine outil, etc...)

Chaque étape de la production est caractérisée géométriquement par un changement de repère c'est à dire par un démontage de la pièce du moyen de production.

Certaines étapes telles que l'usinage nécessitent un posage de la pièce dans un porte pièce. Le posage est assuré par une surface de référence (S_r) en appui sur le porte pièce

Dans un même repère, la dimension obtenue entre deux surfaces S_u , ou deux surfaces S_u et S_r , sera incluse dans une cote fabriquée qui résulte d'une chaîne dimensionnelle passant par le moyen de production.

Cette boucle sera modélisée par deux côtes de simulation L_i indépendantes. Ces deux cotes de simulation représentent les intervalles de variation Δl_i de mise en position des deux surfaces dans un repère lié au moyen de production.

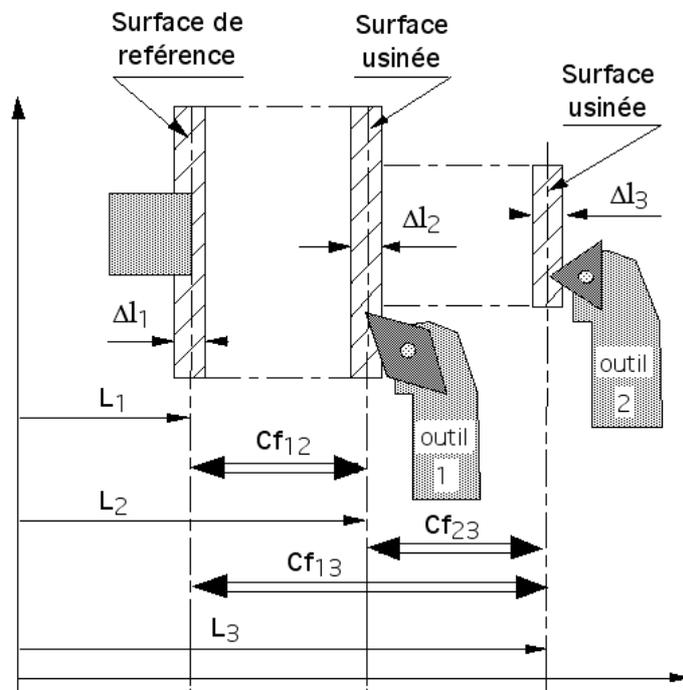
Les intervalles de variation Δl_i englobent toutes les variations possibles et devront, numériquement être supérieurs à des valeurs minimales propres au comportement du moyen de production.

A titre d'exemple nous pouvons illustrer le modèle de simulation sur une étape d'usinage de 2 surfaces.

Chaque pièce de la série occupe une position unique dans le repère fixe lié à la machine-outil.

Δl_i représente la distance entre deux plans parallèles enveloppant toutes les positions que pourrait prendre chacune des surfaces S_u et S_r si plusieurs séries de pièces étaient réalisées.

Δl_i est la dispersion permise d'une cote de simulation L_i représentant la variation de position d'une surface dans un repère fixe lié à la machine de production.



Les causes de variation des Δl_i sont considérées indépendantes et aléatoires.

En conséquence toutes les surfaces S_u et S_r peuvent être liées deux à deux par une cote de fabrication C_{fij} résultante de deux côtes de simulation L_i et L_j indépendantes.

Dans l'exemple d'une pièce composée de 3 surfaces on obtient trois côtes fabriquées C_{f12} , C_{f23} , C_{f13} de la forme :

$$C_{f12} = \text{résultante de } \{L_1, L_2\}$$

$$C_{f23} = \text{résultante de } \{L_2, L_3\}$$

$$C_{f13} = \text{résultante de } \{L_1, L_3\}$$

Les cotes de simulation étant indépendantes on peut établir les relations classiques:

- sur les cotes maxi et mini :

$$C_{f12M} = L_{2M} - L_{1m}$$

$$C_{f23M} = L_{3M} - L_{2m}$$

$$C_{f13M} = L_{3M} - L_{1m}$$

$$C_{f12m} = L_{2m} - L_{1M}$$

$$C_{f23m} = L_{3m} - L_{2M}$$

$$C_{f13m} = L_{3m} - L_{1M}$$

- sur les dispersions centrées :

$$\Delta C_{f12} = \Delta l_1 + \Delta l_2$$

$$\Delta C_{f23} = \Delta l_2 + \Delta l_3$$

$$\Delta C_{f13} = \Delta l_3 + \Delta l_1$$

Remarque : Les 3 cotes C_{f12} , C_{f23} et C_{f13} ne sont pas indépendantes, en effet, si par exemple la cote ΔC_{f13} était déduite des deux cotes ΔC_{f12} et ΔC_{f23} on aurait la relation :

$$\Delta C_{f13} = \Delta C_{f12} + \Delta C_{f23} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_2 + \Delta l_3$$

soit $\Delta C_{f13} = \Delta l_1 + 2 \Delta l_2 + \Delta l_3$ au lieu de $\Delta C_{f13} = \Delta l_3 + \Delta l_1$. En effet, la somme de 2 fois la borne commune donne un ensemble vide de dimensions (Cf 1.3.1).

3.2 INTERVALLE DE TOLERANCE Δl_i

Chaque tolérance Δl_i englobe l'ensemble de toutes les incertitudes, c'est-à-dire une dispersion aléatoire Δl_{i_a} , une zone de réglage Δr incluant une dispersion de réglage Δr , et une zone de dispersion systématique Δs . Expérimentalement il est possible par étude statistique, de déterminer ces différents paramètres. L'étendue Δl_{i_a} des valeurs aléatoires de la dispersion est définie par le critère d'indépendance entre les Δl_i , et par des conditions d'essais particuliers.

321. Exemple de détermination expérimentale des dispersions aléatoires et systématiques.

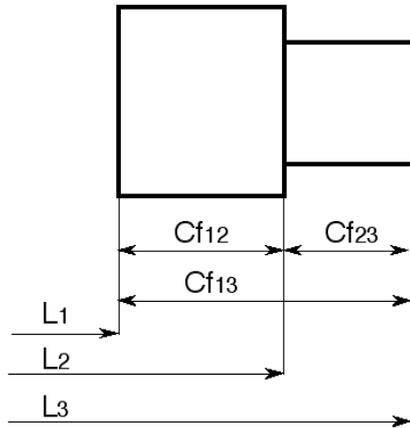
3211. Conditions expérimentales

Comme nous l'avons vu précédemment toute cote fabriquée C_{fij} obtenue sur une série de pièces est la somme de deux cotes L_i passant par la "machine-outil". Soit la relation sur les dispersions :

$$\Delta C_{f12} = \Delta l_1 + \Delta l_2$$

Par mesure, on connaît les cotes réelles fabriquées C_{fij}

Afin d'obtenir 3 conditions à 3 inconnues, il est nécessaire de choisir une sous-phase où 2 surfaces aux moins sont usinées sans démontage de la pièce.



$$\Delta Cf_{12} = \Delta l_1 + \Delta l_2$$

$$\Delta Cf_{23} = \Delta l_2 + \Delta l_3$$

$$\Delta Cf_{13} = \Delta l_1 + \Delta l_3$$

On se place dans les conditions d'essais suivantes

- l'équilibre thermique est atteint,
- l'usure de l'outil est une fonction linéaire de la longueur du copeau,
- les dispersions de mise en position des surfaces dans le repère de la phase d'usinage sont aléatoires
- etc...

Sur chaque pièce de la série on mesure les valeurs de deux dimensions dij, la troisième valeur est déduite par la somme des deux premières.

On prend soin d'effectuer les mesures de dij en intégrant les défauts de parallélisme entre les surfaces.

On obtient ainsi un tableau de valeurs correspondant aux 2 cotes réelles d12 et d13 mesurées et à la troisième cote réelle d23 calculée.

Tableau de valeurs :

| N° | d12 | d13 | d23=d13-d12 | N° | d12 | d13 | d23=d13-d12 |
|----|--------------|-------|-------------|----|--------------|--------------|--------------|
| 1 | 0,993 | 1,957 | 0,964 | 21 | 1,004 | 2,017 | 1,013 |
| 2 | 1,014 | 1,98 | 0,966 | 22 | 0,997 | 1,977 | 0,98 |
| 3 | 0,952 | 1,968 | 1,016 | 23 | 1,017 | 2,039 | 1,022 |
| 4 | 1,002 | 2,012 | 1,01 | 24 | 0,985 | 1,926 | 0,941 |
| 5 | 1,023 | 2,051 | 1,028 | 25 | 1,042 | 2,056 | 1,014 |
| 6 | 1,011 | 2,018 | 1,007 | 26 | 1,008 | 2,009 | 1,001 |
| 7 | 0,975 | 1,942 | 0,967 | 27 | 1,026 | 1,996 | 0,97 |
| 8 | 1,002 | 2,031 | 1,029 | 28 | 0,998 | 1,985 | 0,987 |
| 9 | 1,02 | 2,003 | 0,983 | 29 | 1,035 | 2,088 | 1,053 |
| 10 | 0,999 | 1,958 | 0,959 | 30 | 0,968 | 1,977 | 1,009 |
| 11 | 1,03 | 2,031 | 1,001 | 31 | 1,028 | 2,008 | 0,98 |
| 12 | 1,013 | 2,033 | 1,02 | 32 | 1,018 | 1,985 | 0,967 |
| 13 | 0,982 | 1,962 | 0,98 | 33 | 0,994 | 2,018 | 1,024 |
| 14 | 1,057 | 2,059 | 1,002 | 34 | 1,011 | 1,997 | 0,986 |
| 15 | 0,995 | 1,987 | 0,992 | 35 | 1,062 | 2,051 | 0,989 |
| 16 | 0,996 | 1,979 | 0,983 | 36 | 1,029 | 1,961 | 0,932 |
| 17 | 1,008 | 2,015 | 1,007 | 37 | 1,029 | 2,022 | 0,993 |
| 18 | 1,026 | 1,993 | 0,967 | 38 | 1,093 | 2,11 | 1,017 |
| 19 | 0,993 | 2,028 | 1,035 | 39 | 1,042 | 2,043 | 1,001 |
| 20 | 1,013 | 2,006 | 0,993 | 40 | 1,02 | 1,985 | 0,965 |

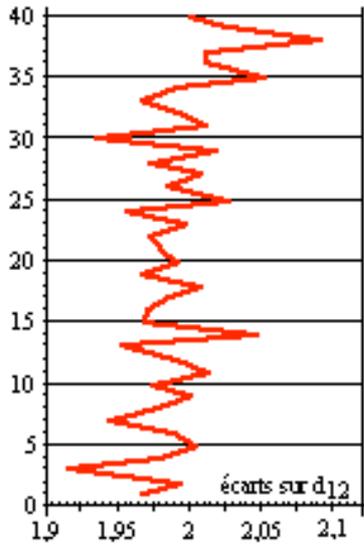
Première constatation : en relevant les écarts mini et maxi des 3 séries de dimensions (caractères gras du tableau) on obtient : $\Delta Cf_{12} = 0,141$, $\Delta Cf_{13} = 0,184$ et $\Delta Cf_{23} = 0,121$. On vérifie bien que les 3 cotes Cf12, Cf23 et Cf13 ne sont pas indépendantes et qu'aucun des 3 intervalles de tolérance ΔCf_{12} , ΔCf_{23} ou ΔCf_{13} n'est égale à la somme des deux

autres. Cette constatation sera toujours vraie chaque fois que 2 cotes de fabrication obtenues sans démontage de la pièce apparaissent dans une même chaîne de cotes et que la dispersion de la surface commune aux deux cotes n'est pas négligeable.

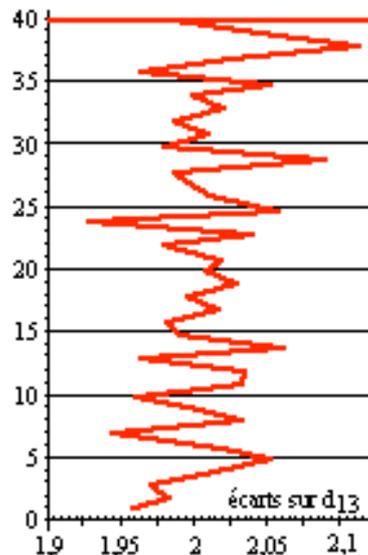
3212 *Histogramme et interprétation*

Pour chaque cote, on trace (sous excel de Microsoft) l'évolution des dimensions en fonction du n° d'ordre d'usinage.

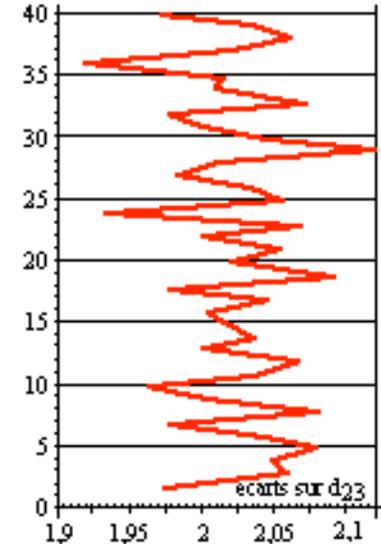
Cote réelle $C_{12}^* \{ d_{12}^k; \dots \}$



Cote réelle $C_{13}^* \{ d_{13}^k; \dots \}$



Cote réelle $C_{23}^* \{ d_{23}^k = d_{13}^k - d_{12}^k \}$



L'allure générale de l'évolution montre si on est bien dans l'hypothèse d'un équilibre thermique de la machine (une mesure de la température de la machine en cours d'usinage permet une meilleure interprétation). Dans le cas traité, aucune évolution thermique n'apparaît

On remarque par contre une évolution linéaire due certainement à l'usure d'outil. Cette évolution est calculée par une droite des moindres carrés. (voir graphe ci contre pour la cote réelle C_{12}^*)

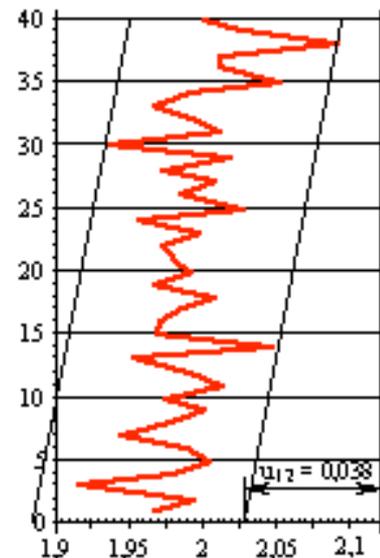
Pour chaque cote on trouve une évolution linéaire de pente différente (ce qui correspond à un usinage avec 2 outils différents).

On lit les usures d'outil totales suivantes :

$$u_{12} = 0,038 \quad u_{13} = 0,031 \quad u_{23} = 0,006$$

On remarque que $u_{23} \approx u_{13} - u_{12}$

On peut donc conclure en une bonne compatibilité des résultats.



Remarque :

511. Dans le cas particulier où les surfaces seraient usinées avec le même outil, on devrait trouver : $u_{12} = u_{13}$ et par suite $u_{23} = 0$.

2- Dans le cas où la dispersion aléatoire est grande devant l'usure d'outil, il n'est plus alors possible de reconnaître une évolution linéaire caractéristique. Les usures d'outil sont négligeables devant les dispersions

3- Les résultats de l'essais présenté correspondent à un usinage en continue d'une série de 40 pièces, sans changement de réglage des outils en cours de production (correcteurs d'outil fixes).

322. Évaluation des dispersions aléatoires

1/ Pour chaque dimension on retranche (ou on ajoute) la part due à l'usure d'outil.

Exemple pour la cote C_{12}^* :

l'usure totale est de 0,038

l'usure par pièce est $U_p = 0,038/39 = 0,000775$

Ce qui donne le tableau suivant :

| N° | d12 | d12 redressé | N° | d12 | d12 redressé |
|----|-------|--------------|----|-------|--------------|
| 1 | 0,993 | 0,993 | 21 | 1,004 | 0,985 |
| 2 | 1,014 | 1,013 | 22 | 0,997 | 0,977 |
| 3 | 0,952 | 0,950 | 23 | 1,017 | 0,996 |
| 4 | 1,002 | 0,999 | 24 | 0,985 | 0,963 |
| 5 | 1,023 | 1,019 | 25 | 1,042 | 1,019 |
| 6 | 1,011 | 1,006 | 26 | 1,008 | 0,984 |
| 7 | 0,975 | 0,969 | 27 | 1,026 | 1,001 |
| 8 | 1,002 | 0,995 | 28 | 0,998 | 0,972 |
| 9 | 1,020 | 1,012 | 29 | 1,035 | 1,008 |
| 10 | 0,999 | 0,990 | 30 | 0,968 | 0,940 |
| 11 | 1,030 | 1,021 | 31 | 1,028 | 1,000 |
| 12 | 1,013 | 1,003 | 32 | 1,018 | 0,989 |
| 13 | 0,982 | 0,971 | 33 | 0,994 | 0,964 |
| 14 | 1,057 | 1,045 | 34 | 1,011 | 0,980 |
| 15 | 0,995 | 0,982 | 35 | 1,062 | 1,029 |
| 16 | 0,996 | 0,982 | 36 | 1,029 | 0,996 |
| 17 | 1,008 | 0,993 | 37 | 1,029 | 0,994 |
| 18 | 1,026 | 1,010 | 38 | 1,093 | 1,057 |
| 19 | 0,993 | 0,976 | 39 | 1,042 | 1,005 |
| 20 | 1,013 | 0,995 | 40 | 1,020 | 0,982 |

Résultats statistiques de la dispersion aléatoire (en mm):

Étendue 0,117

Moyenne statistique : 0,994

Variance 0,001

Écart type 0,023

Intervalle de confiance à 6σ : 0,140 (risque $\alpha = 2,8\%$ pour une distribution gaussienne de la population)

2/ Recherche des points aberrants :

Tout dimension en dehors de l'intervalle $\pm 3,5 \sigma$ peut-être considéré comme une dimension aberrante (risque de 0,04%) et être supprimée de l'essais.

3/ Calcul des caractéristiques des dispersions aléatoires des cotes fabriquées.

Pour chaque cote fabriquée on calcule de la même façon :

l'intervalle de tolérance aléatoire ITa de l'échantillon usiné

l'écart type σ' (de la population)

l'intervalle de tolérance estimé $IT = 6.\sigma'$ avec un risque $\alpha = 2,8\%$ pour une distribution gaussienne de la population

On trouve ici :

| | Cote C_{12}^* | Cote C_{13}^* | Cote C_{23}^* |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|
| l'intervalle de tolérance IT_a de l'échantillon usiné | 0,117 | 0,173 | 0,119 |
| l'écart type estimé σ de la population | 0,023 | 0,038 | 0,026 |
| l'intervalle de tolérance estimé à $6.\sigma'$ ($\alpha = 0,3\%$) | 0,140 | 0,225 | 0,157 |

Ces résultats permettent de résoudre 3 équations à 3 inconnues :

Soit :

$$\Delta C_{f12a} = \Delta l_{1a} + \Delta l_{2a}$$

$$\Delta C_{f23a} = \Delta l_{2a} + \Delta l_{3a}$$

$$\Delta C_{f13a} = \Delta l_{3a} + \Delta l_{1a}$$

On en déduit :

a) les dispersions aléatoires de mise en position des surfaces sur un échantillon de 40 pièces.

$$0,117 = \Delta l_{1a} + \Delta l_{2a}$$

$$0,173 = \Delta l_{2a} + \Delta l_{3a}$$

$$0,119 = \Delta l_{3a} + \Delta l_{1a}$$

soit : $\Delta l_{1a} = 0,086$

$$\Delta l_{2a} = 0,032$$

$$\Delta l_{3a} = 0,087$$

Chap 4 : Chaîne de cotes de fabrication (Mode opératoire)



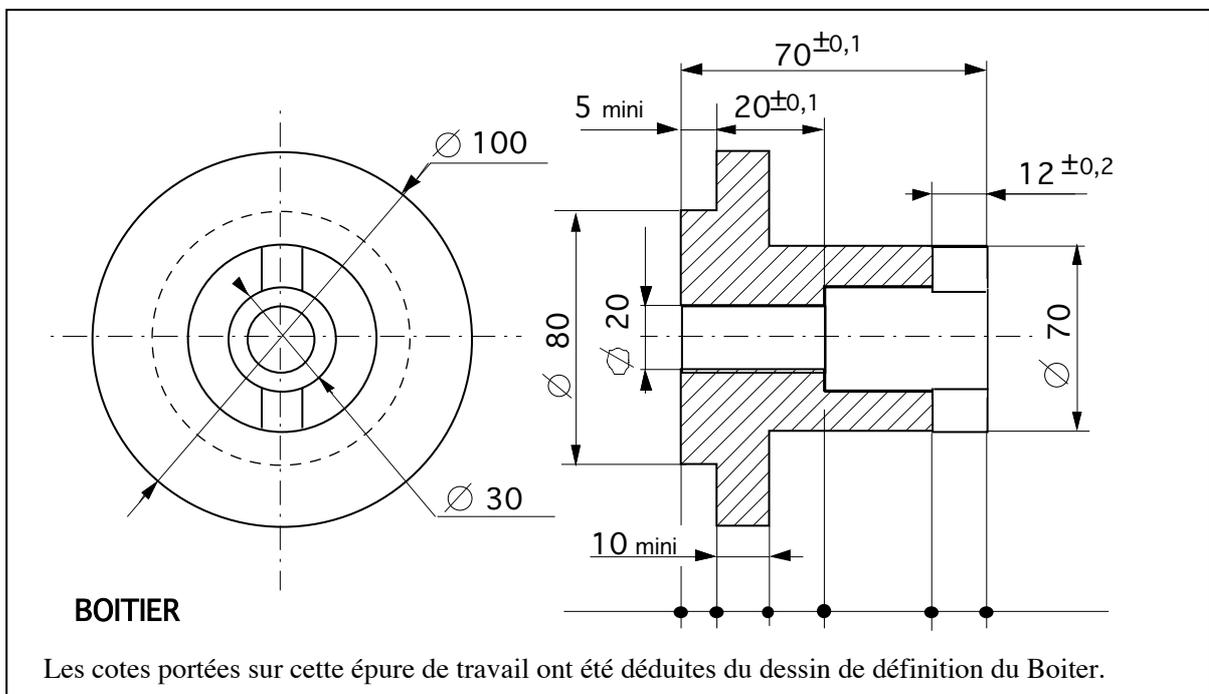
4.1 GRAPHE DE FABRICATION

Le modèle des ΔI proposé au chapitre précédent permet, sous forme de graphe, une résolution systématique du choix des cotes fabriquées et de la répartition des tolérances.

Ce formalisme peut être illustré sur un exemple traité dans une seule direction de cotation. On se place dans le cas où les spécifications normalisées du dessin de définition de la pièce ont été traduites sous forme de cotes fonctionnelles.

4.1.1 Étape 1 : données

Le dessin du boîtier traduit sous forme de cotes, les conditions à respecter. Suivant la direction étudiée 5 cotes sont à considérer : 3 cotes bilimites données par leurs cotes maxi et mini ($70 \pm 0,1$; $20 \pm 0,1$; $12 \pm 0,2$) et 2 cotes unilimites données par leur cote mini (5mini et 10mini).



4.1.2 Étape 2 : Proposition d'un processus de réalisation

Cette pièce est réalisée à partir d'une préforme obtenue par forgeage. Les phases d'usinage sont les suivantes :

- sur tour, ébauche puis finition des cylindres de diamètre 100, 80 et des surfaces qui leur sont associées.
- sur tour, ébauche et finition des cylindres de diamètre 70, 20, 30 et des surfaces qui leur sont associées.
- sur fraiseuse, réalisation de la rainure de profondeur $12 \pm 0,2$.

À chaque étape de réalisation, on associe un repère lié au moyen de production (matrice, machines-outils). Les différentes surfaces aussi bien d'ébauche que de finition apparaissent sur le graphe de fabrication.

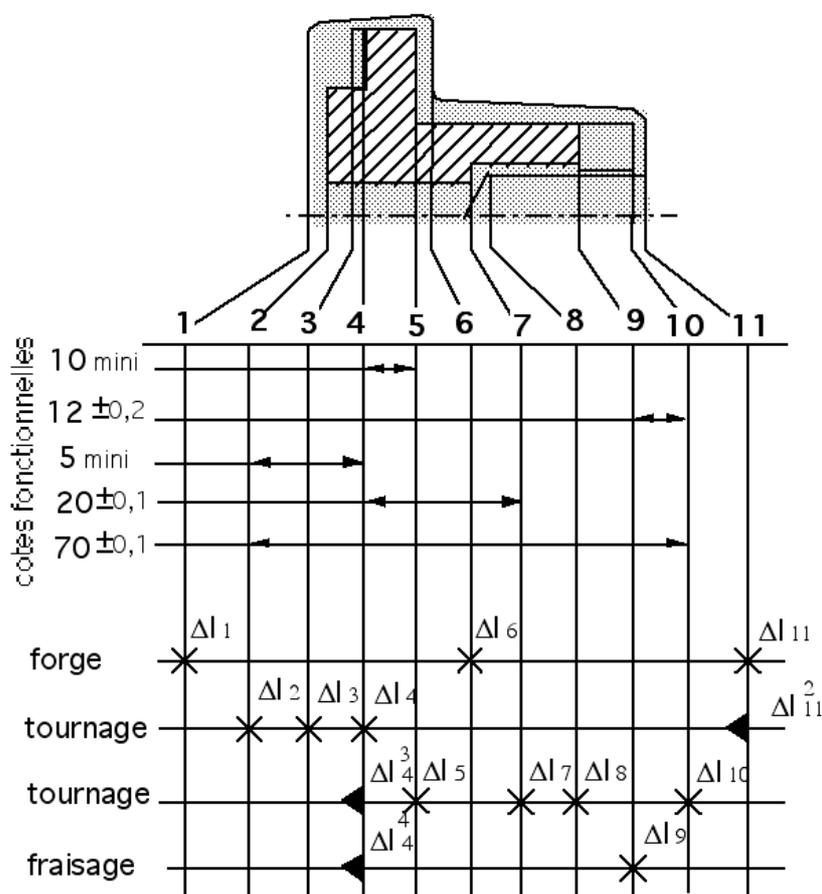
4.1.3 Étape 3 : Graphe de simulation de la fabrication

Sur ce graphe, chaque repère est représenté par une ligne, et chaque surface par une colonne.

Par convention, dans un repère, une croix désigne une surface créée dans la phase, et un triangle une surface de contact entre la pièce et son porte pièce.

Les intervalles de tolérance des cotes de simulation L_i sont notés Δl_i pour les surfaces créées, et par Δl_i^j pour les surfaces de contact. L'indice i est le numéro de la surface concernée, l'exposant j est le numéro de la phase ou du repère.

En tête du graphe, on représente par des flèches, les différentes cotes faisant l'objet de la simulation.



4.1.4 Calcul des intervalles de tolérance Δl_i imposés par les cotes bilimites

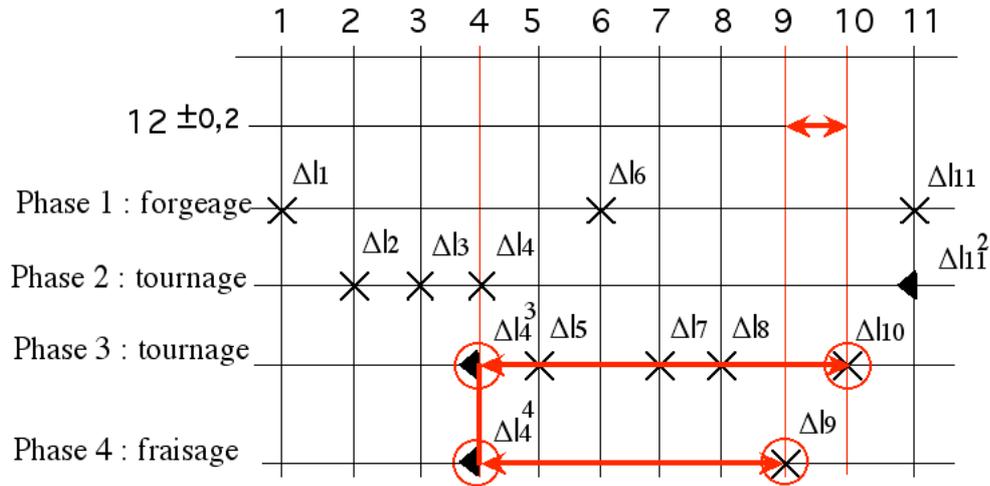
À toute cote bilimite correspond une contrainte entre les intervalles de tolérance Δl_i des cotes de simulation L_i . À l'aide du graphe de simulation de la fabrication, on écrit immédiatement pour cet exemple, les 3 relations correspondant aux 3 cotes bilimites ($70 \pm 0,1$; $20 \pm 0,1$; $12 \pm 0,2$) :

Expression de l'intervalle de tolérance de la cote fabriquée $Cf_{9,10}$ correspondant à la cote fonctionnelle de $12 \pm 0,2$ entre les surfaces 9 et 10

$$(1) \quad \Delta C_{f_{9,10}} = \underbrace{\Delta l_9 + \Delta l_4^4}_{\Delta C_{f_{9,4}}^4} + \underbrace{\Delta l_4^3 + \Delta l_{10}}_{\Delta C_{f_{4,10}}^3} \leq 0,4$$

Cette relation est obtenue en parcourant le graphe de simulation. Le trajet minimal (qui est unique) est construit en appliquant les deux règles suivantes :

- choisir une seule cote fabriquée par phase (dont l'intervalle de tolérance est la somme de deux intervalles de tolérance Δl_i)
- passer d'une phase à une autre par une même surface.



On obtient ainsi les expressions :

de l'intervalle de tolérance de la cote fabriquée $Cf_{4,7}$ correspondant à la cote fonctionnelle de $20 \pm 0,1$ entre les surfaces 4 et 7

$$(2) \quad \Delta Cf_{4,7}^3 = \Delta l_4^3 + \Delta l_7 \leq 0,2$$

et de l'intervalle de tolérance de la cote fabriquée $Cf_{2,10}$ correspondant à la cote fonctionnelle de $70 \pm 0,1$ entre les surfaces 2 et 10

$$(3) \quad \Delta Cf_{2,10} = \underbrace{\Delta l_2 + \Delta l_4}_{\Delta Cf_{2,4}^2} + \underbrace{\Delta l_4^3 + \Delta l_{10}}_{\Delta Cf_{4,10}^3} \leq 0,2$$

Le système d'inéquations formé de (1), (2), (3) est résolu en maximisant successivement les valeurs des intervalles de tolérances Δl_i les plus restrictives, et en imposant que chaque valeur d'un intervalle de tolérance Δl_i soit supérieure à une valeur minimale Δl_{ai} exprimant la dispersion aléatoire correspondante.

4.2 REPARTITION OPTIMALE DES TOLERANCES

La résolution peut-être réalisée à l'aide d'un tableur tel que Excel :

Premier état du tableau :

| | Δl_1 | Δl_2 | Δl_3 | Δl_4 | Δl_4^3 | Δl_4^4 | Δl_5 | Δl_6 | Δl_7 | Δl_8 | Δl_9 | Δl_{10} | Δl_{11} | Δl_{11}^2 | Somme des Δl_i | IT | somme des coef | Ecart | accroissement |
|------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|----------------|----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-----------------|-----------------|-------------------|------------------------|-----|----------------|-------|---------------|
| valeur de Δl_i | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,03 | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,2 | | | | | |
| coefficient | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | |
| $12 \pm 0,2$ | | | | | 0,03 | 0,03 | | | | | 0,02 | 0,02 | | | 0,1 | 0,4 | 4 | 0,3 | 0,075 |
| $20 \pm 0,1$ | | | | | 0,03 | | | | 0,02 | | | | | | 0,05 | 0,2 | 2 | 0,15 | 0,075 |
| $70 \pm 0,1$ | | 0,02 | | 0,02 | 0,03 | | | | | | | 0,02 | | | 0,09 | 0,2 | 4 | 0,11 | 0,0275 |

Deuxième état du tableau :

| | Δl_1 | Δl_2 | Δl_3 | Δl_4 | Δl_4^3 | Δl_4^4 | Δl_5 | Δl_6 | Δl_7 | Δl_8 | Δl_9 | Δl_{10} | Δl_{11} | Δl_{11}^2 | Somme des Δl | IT | somme des coef | Ecart | accroissement |
|----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|----------------|----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-----------------|-----------------|-------------------|----------------------|-----|----------------|-------|---------------|
| valeur de Δl | 0,02 | 0,048 | 0,02 | 0,048 | 0,058 | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,048 | 0,02 | 0,2 | | | | | |
| coefficient | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | | | | | |
| 12±0,2 | | | | | 0,03 | 0,03 | | | | | 0,02 | 0,02 | | | 0,156 | 0,4 | 2 | 0,244 | 0,122 |
| 20±0,1 | | | | | 0,03 | | | | 0,02 | | | | | | 0,78 | 0,2 | 1 | 0,122 | 0,122 |
| 70±0,1 | | 0,048 | | 0,048 | 0,058 | | | | | | | 0,048 | | | 0,2 | 0,2 | 0 | 0 | - |

Troisième état du tableau :

| | Δl_1 | Δl_2 | Δl_3 | Δl_4 | Δl_4^3 | Δl_4^4 | Δl_5 | Δl_6 | Δl_7 | Δl_8 | Δl_9 | Δl_{10} | Δl_{11} | Δl_{11}^2 | Somme des Δl | IT | somme des coef | Ecart | accroissement |
|----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|----------------|----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-----------------|-----------------|-------------------|----------------------|-----|----------------|-------|---------------|
| valeur de Δl | 0,02 | 0,048 | 0,02 | 0,048 | 0,058 | 0,152 | 0,02 | 0,02 | 0,142 | 0,02 | 0,142 | 0,048 | 0,02 | 0,2 | | | | | |
| coefficient | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | | | | | |
| 12±0,2 | | | | | 0,058 | 0,152 | | | | | 0,142 | 0,048 | | | 0,4 | 0,4 | 0 | 0 | - |
| 20±0,1 | | | | | 0,058 | | | | 0,142 | | | | | | 0,2 | 0,2 | 0 | 0 | - |
| 70±0,1 | | 0,048 | | 0,048 | 0,058 | | | | | | | 0,048 | | | 0,2 | 0,2 | 0 | 0 | - |

Afin de donner des résultats au 0,01mm près, on obtient :

| | Δl_1 | Δl_2 | Δl_3 | Δl_4 | Δl_4^3 | Δl_4^4 | Δl_5 | Δl_6 | Δl_7 | Δl_8 | Δl_9 | Δl_{10} | Δl_{11} | Δl_{11}^2 | Somme des Δl | IT | somme des coef | Écart | accroissement |
|----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|----------------|----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-----------------|-----------------|-------------------|----------------------|-----|----------------|-------|---------------|
| valeur de Δl | 0,02 | 0,05 | 0,02 | 0,05 | 0,05 | 0,15 | 0,02 | 0,02 | 0,15 | 0,02 | 0,15 | 0,05 | 0,02 | 0,2 | | | | | |
| coefficient | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | | | | | |
| 12±0,2 | | | | | 0,05 | 0,15 | | | | | 0,15 | 0,05 | | | 0,4 | 0,4 | 0 | 0 | - |
| 20±0,1 | | | | | 0,05 | | | | 0,15 | | | | | | 0,2 | 0,2 | 0 | 0 | - |
| 70±0,1 | | 0,05 | | 0,05 | 0,05 | | | | | | | 0,05 | | | 0,2 | 0,2 | 0 | 0 | - |

Soit les valeurs :

$$\Delta l_2 = 0,05 \quad \Delta l_4 = 0,05 \quad \Delta l_4^3 = 0,05 \quad \Delta l_4^4 = 0,15 \quad \Delta l_7 = 0,15 \quad \Delta l_9 = 0,15 \quad \Delta l_{10} = 0,05$$

Les valeurs des intervalles de tolérance Δl_i non imposées par des cotes bilimites sont choisies afin de les obtenir à coût minimal, c'est-à-dire sans contraintes particulières :

$$\Delta l_3 = 0,15 \quad \Delta l_5 = 0,15 \quad \Delta l_{11}^2 = 0,3 \quad \Delta l_8 = 0,15$$

4.2.1 Calcul des valeurs des intervalles de tolérance des cotes unilimites :

La connaissance des valeurs des intervalles de tolérance Δl_i permet de calculer les valeurs des intervalles de tolérance des cotes unilimites déduites du dessin de définition ou des exigences de production.

Dans l'exemple traité, le dessin de définition impose 2 cotes unilimites 10mini et 5mini.

D'autre part en usinage, les conditions de coupe imposent dans cet exemple un copeau mini en ébauche de 2mm et un copeau mini en finition de 0,2mm.

Ces contraintes se traduisent par les équations suivantes :

Intervalle de tolérance de la cote fabriquée entre les surfaces 4 et 5 (correspondant à la cote 10 mini):

$$(4) \quad \Delta C f_{4,5}^3 = \Delta l_4^3 + \Delta l_5 = 0,2$$

Intervalle de tolérance de la cote fabriquée entre les surfaces 2 et 4 (correspondant à la cote 5 mini) :

$$(5) \quad \Delta C f_{2,4}^2 = \Delta l_2 + \Delta l_4 = 0,1$$

Intervalle de tolérance du copeau d'ébauche entre les surfaces 1 et 2 (2 mini):

$$(6) \quad \Delta Cf_{1,2} = \underbrace{\Delta l_1 + \Delta l_{11}}_{\Delta Cf_{1,11}^1} + \underbrace{\Delta l_{11}^2 + \Delta l_2}_{\Delta Cf_{11,2}^2} = 2,35 \quad \text{avec } \Delta Cf_{1,11}^1 = 2 \text{ (pièce brute)}$$

Intervalle de tolérance du copeau d'ébauche entre les surfaces 5 et 6 (2 mini):

$$(7) \quad \Delta Cf_{5,6} = \underbrace{\Delta l_5 + \Delta l_4^3}_{\Delta Cf_{5,4}^3} + \underbrace{\Delta l_4 + \Delta l_{11}^2}_{\Delta Cf_{4,11}^2} + \underbrace{\Delta l_{11} + \Delta l_6}_{\Delta Cf_{6,11}^1} = 2,55 \text{ avec } \Delta Cf_{6,11}^1 = 2 \text{ (pièce brute)}$$

Intervalle de tolérance du copeau d'ébauche entre les surfaces 10 et 11 (2mini) :

$$(8) \quad \Delta Cf_{10,11} = \underbrace{\Delta l_{10} + \Delta l_4^3}_{\Delta Cf_{10,4}^3} + \underbrace{\Delta l_4 + \Delta l_{11}^2}_{\Delta Cf_{4,11}^2} = 0,45$$

Intervalle de tolérance du copeau de finition entre les surfaces 3 et 4 (0,2mini) :

$$(9) \quad \Delta Cf_{3,4}^2 = \Delta l_3 + \Delta l_4 = 0,2$$

Intervalle de tolérance du copeau de finition entre les surfaces 7 et 8 (0,2mini) :

$$(10) \quad \Delta Cf_{7,8}^3 = \Delta l_7 + \Delta l_8 = 0,3$$

4.3 CHOIX DES COTES FABRIQUEES

4.3.1 Cotes fabriquées :

Les 10 relations précédentes simulent la production, on peut donc affirmer que si ces 10 relations sont vérifiées en cours de production, la pièce sera conforme aux cotes déduites du dessin de définition.

Ces 10 relations établissent des relations entre des cotes fabriquées, celles-ci permettent immédiatement d'établir la cotation de la pièce brute et des géométries prises successivement par la pièce au cours de sa réalisation.

Par exemple la relation (7) $\Delta Cf_{5,6} = \Delta l_5 + \Delta l_4^3 + \Delta l_4 + \Delta l_{11}^2 + \Delta l_{11} + \Delta l_6$ impose les 3 cotes fabriquées suivantes :

$\Delta l_5 + \Delta l_4^3$ impose la cote fabriquée $Cf_{4,5}^3$ entre les surfaces 4 et 5 (phase 3 : tournage)

$\Delta l_4 + \Delta l_{11}^2$ impose la cote fabriquée $Cf_{11,4}^2$ entre les surfaces 11 et 4 (phase 2 : tournage)

$\Delta l_{11} + \Delta l_6$ impose la cote du brut $Cf_{6,11}^1$ entre les surfaces 6 et 11 (phase 1 : forgeage)

4.3.2 Calcul des cotes moyennes des cotes fabriquées

Le calcul des cotes moyennes revient à déterminer (n-1) dimensions moyennes indépendantes positionnant les n surfaces.

Dans cet exemple, 10 dimensions moyennes pour 11 surfaces sont à définir. Cela revient à résoudre un système de 10 équations à 10 inconnues. Chaque cote bilimite donne directement une équation, la connaissance des intervalles de tolérance des cotes unilimites permettent de définir les dimensions moyennes correspondantes.

$$\bar{d}_{9,10} = 12$$

$$\bar{d}_{4,7} = 20$$

$$\bar{d}_{2,10} = 70$$

$$\bar{d}_{4,5} = 10_{\min i} + \frac{\Delta Cf_{4,5}}{2} = 10,1 \quad \text{avec } \Delta Cf_{4,5} = 0,2 \text{ cf. équation (4)}$$

$$\bar{d}_{2,4} = 5_{\min i} + \frac{\Delta Cf_{2,4}}{2} = 5,05 \quad \text{avec } \Delta Cf_{2,4} = 0,1 \text{ cf. équation (5)}$$

$$\bar{d}_{1,2} = 2_{\min i} + \frac{\Delta Cf_{1,2}}{2} = 3,175 \quad \text{avec } \Delta Cf_{1,2} = 2,35 \text{ cf. équation (6)}$$

$$\bar{d}_{5,6} = 2_{\min i} + \frac{\Delta Cf_{5,6}}{2} = 3,275 \quad \text{avec } \Delta Cf_{5,6} = 2,55 \text{ cf. équation (7)}$$

$$\bar{d}_{10,11} = 2_{\min i} + \frac{\Delta Cf_{10,11}}{2} = 2,225 \quad \text{avec } \Delta Cf_{10,11} = 0,45 \text{ cf. équation (8)}$$

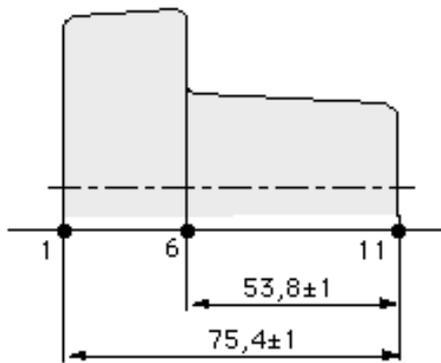
$$\bar{d}_{3,4} = 0,2_{\min i} + \frac{\Delta Cf_{3,4}}{2} = 0,3 \quad \text{avec } \Delta Cf_{3,4} = 0,2 \text{ cf. équation (9)}$$

$$\bar{d}_{7,8} = 0,2_{\min i} + \frac{\Delta Cf_{7,8}}{2} = 0,35 \quad \text{avec } \Delta Cf_{7,8} = 0,3 \text{ cf. équation (10)}$$

Après calcul des dimensions moyennes des cotes fabriquées de chaque phase, on obtient:

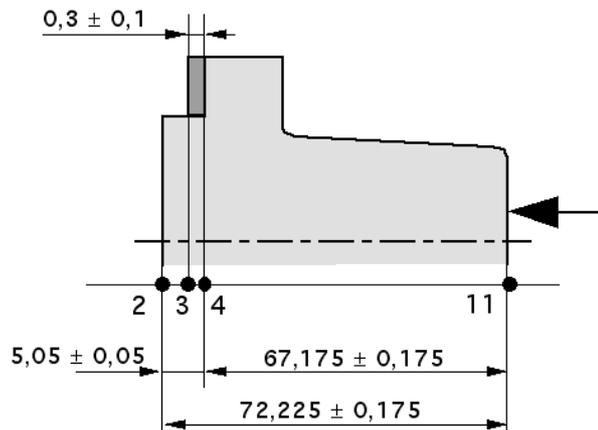
Phase 1 : forgeage

Cotes fabriquées du brut : $Cf_{1,11}^1$; $Cf_{5,11}^1$



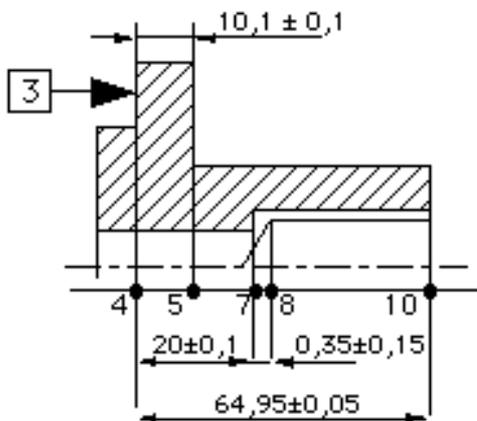
Phase 2 : tournage :

Cotes fabriquées : $Cf_{2,4}^2$; $Cf_{2,11}^2$; $Cf_{3,4}^2$; $Cf_{4,11}^2$



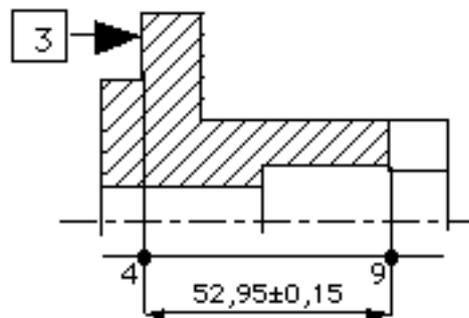
Phase 3 : tournage

Cotes fabriquées: $Cf_{4,5}^3$; $Cf_{4,7}^3$; $Cf_{4,10}^3$; $Cf_{7,8}^3$



Phase 4 : fraisage

Cotes fabriquées : $Cf_{4,9}^3$



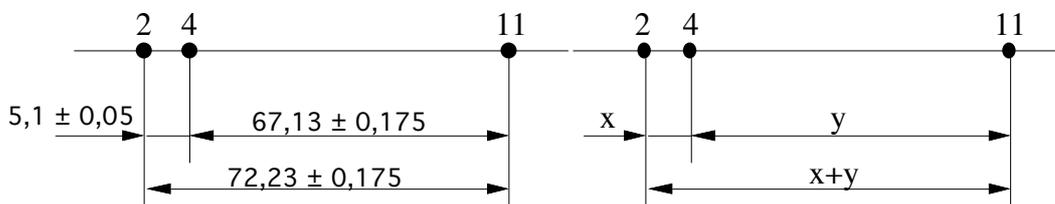
4.3.3 Remarque sur les chaînes fermées de cotes

Dans l'exemple traité, les cotes fabriquées obtenues dans la phase 2 de tournage forment une chaîne fermée de trois cotes. Il est souvent recommandé par habitude, de supprimer l'une des trois cotes pour respecter la règle, souvent non justifiée, de ne jamais utiliser sur une même pièce une chaîne fermée de cotes.

Si cette règle est appliquée, elle a pour conséquence immédiate de réduire les valeurs des intervalles de tolérance des deux cotes fabriquées choisies, et par suite de déclarer hors tolérances des pièces capables de satisfaire pleinement les cotes fonctionnelles du dessin de définition.

A l'aide d'un graphique, il est possible, dans l'exemple traité, de représenter par une surface hachurée le domaine où les valeurs des écarts x , y et z des trois dimensions $d_{1,2}$, $d_{2,3}$ et $d_{1,3}$ de la pièce sont en conformité avec les exigences des trois cotes $5,1 \pm 0,05$, $67,13 \pm 0,175$ et $72,23 \pm 0,175$.

Cas où l'on vérifie les trois écarts x , y et $x+y$

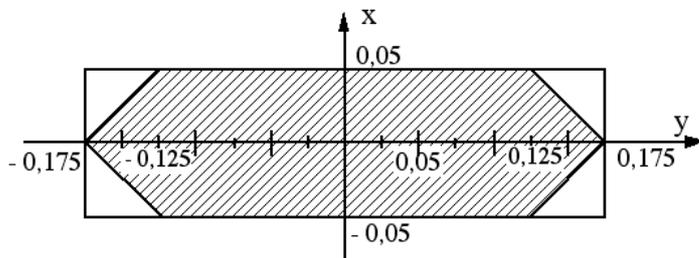


Le domaine est défini par les trois relations :

$$-0,05 \leq x \leq 0,05$$

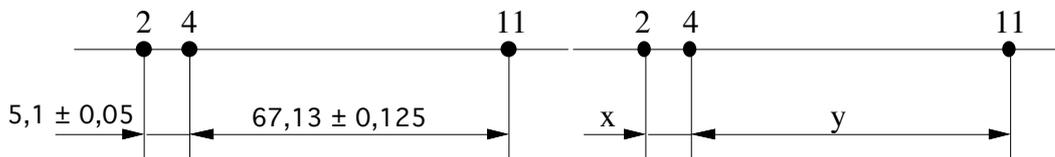
$$-0,175 \leq y \leq 0,175$$

$$-0,175 \leq x+y \leq 0,175$$



Cas où l'on ne vérifie que les deux écarts x , y

La somme des intervalles de tolérance des deux cotes $C_{2,4}$ et $C_{4,11}$ doit être égale à l'intervalle de tolérance de la cote $C_{2,11}$. On choisit ici de réduire l'intervalle de tolérance de la cote $C_{4,11}$ à la valeur de $\pm 0,025$.



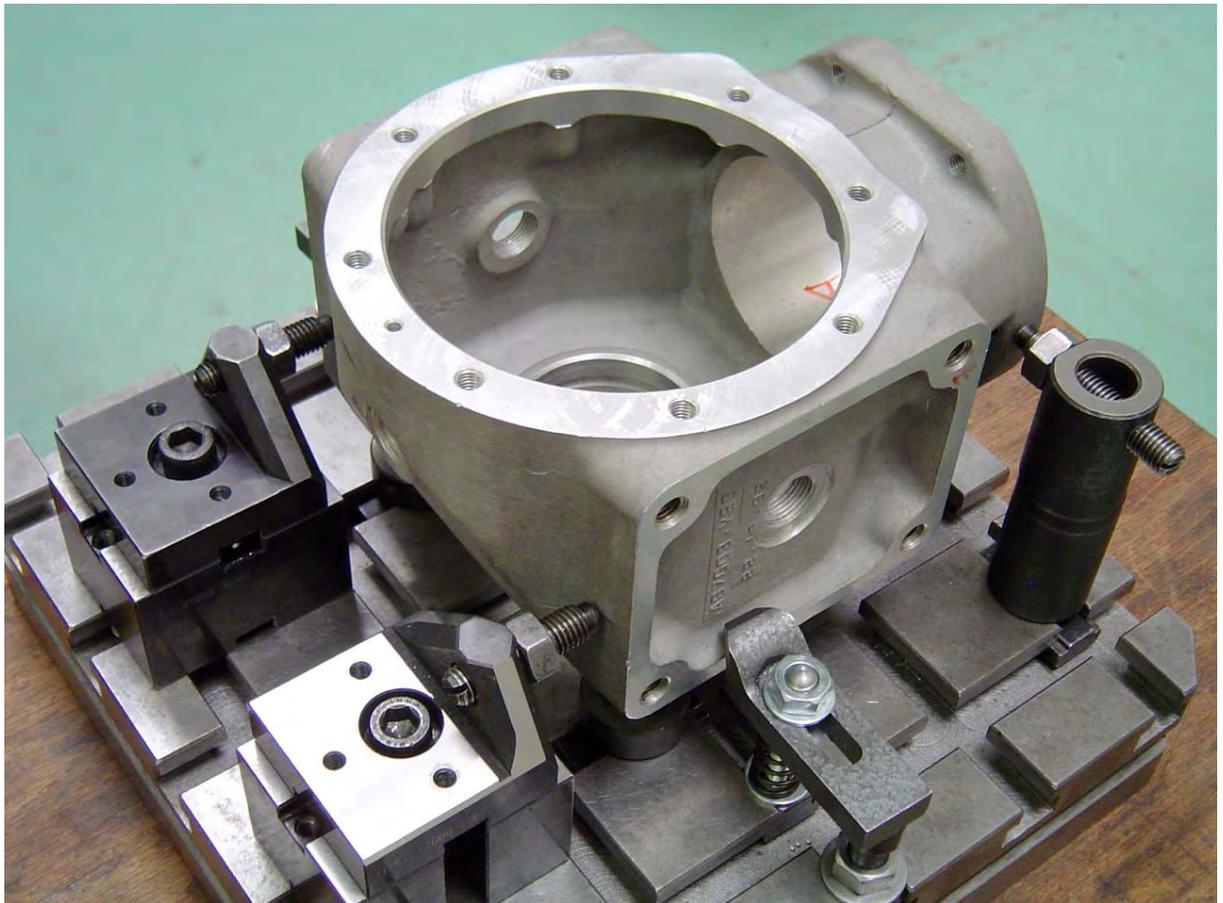
Le domaine est défini par les deux relations :

$$-0,05 \leq x \leq 0,05$$

$$-0,125 \leq y \leq 0,125$$

On constate que c'est dans le premier cas, que le domaine de pièces déclarées bonnes est le plus grand et par suite le moins coûteux.

Partie 2 : Les Montages d'usinage



Chap 5 : Montages d'usinage

=====

51. FONCTIONS D'UN MONTAGE D'USINAGE :

Un montage d'usinage doit satisfaire trois fonctions principales :

- assurer une **mise en position des surfaces de références** de la pièce en minimisant les dispersions.
- **maintenir la pièce** en position sous les efforts de coupe.
- **positionner les outils** par rapport à la pièce.

52. TYPOLOGIE DES MONTAGES D'USINAGES

Selon que la pièce par sa fréquence de rotation assure ou non la vitesse de coupe, et selon que la morphologie générale des surfaces de référence soit ou non de révolution, on peut définir deux grandes catégories de montages d'usinage. Les montages adaptés au tournage et aux pièces de révolution (mandrin, pointes) et les montages adaptés au fraisage et aux pièces de forme générale polyédrique (montages modulaires, étaux etc..).

521. Exemples de montages adaptés au Tournage et aux pièces de révolution :

- "Montage en l'air" : mandrin à 3 mors concentriques sur centre de tournage



- "Montage mixte" sur tour à commande numérique



- "Montage entre pointes" sur tour à commande numérique

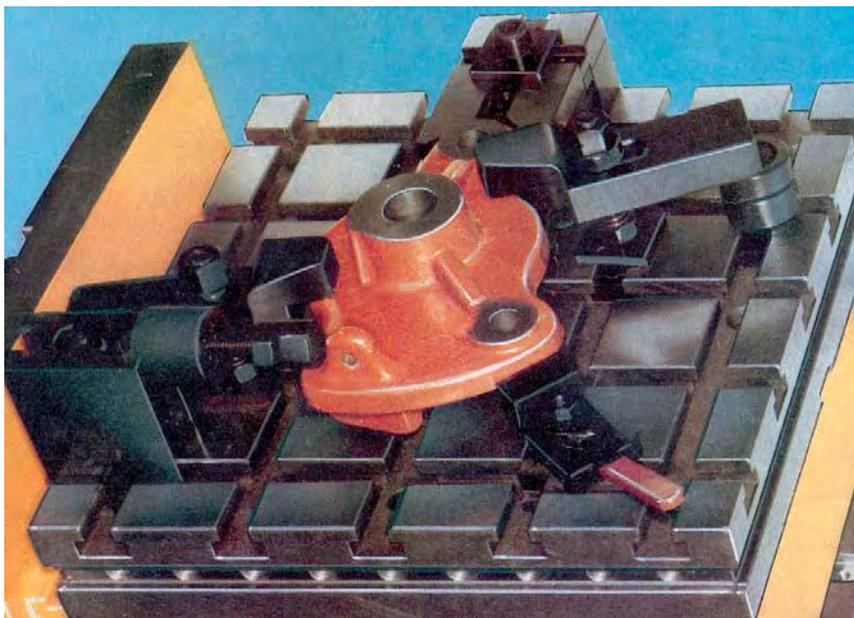


- Montage en mandrin à 3 mors concentriques, sur centre de fraisage à 5 axes.



522. Exemples de montages adaptés au Fraisage et aux pièces polyédriques :

- Montage d'usinage modulaire



Ce type de montage est constitué d'une plaque-support (ou équerre ou dé) sur laquelle il est possible de fixer différents composants standards réalisant la mise en position des surfaces de référence et le bridage de la pièce.

La préparation du montage se fait en dehors de la Machine Outil, l'ensemble du montage est ensuite positionné et fixé sur la table ou la palette de la MOCN.

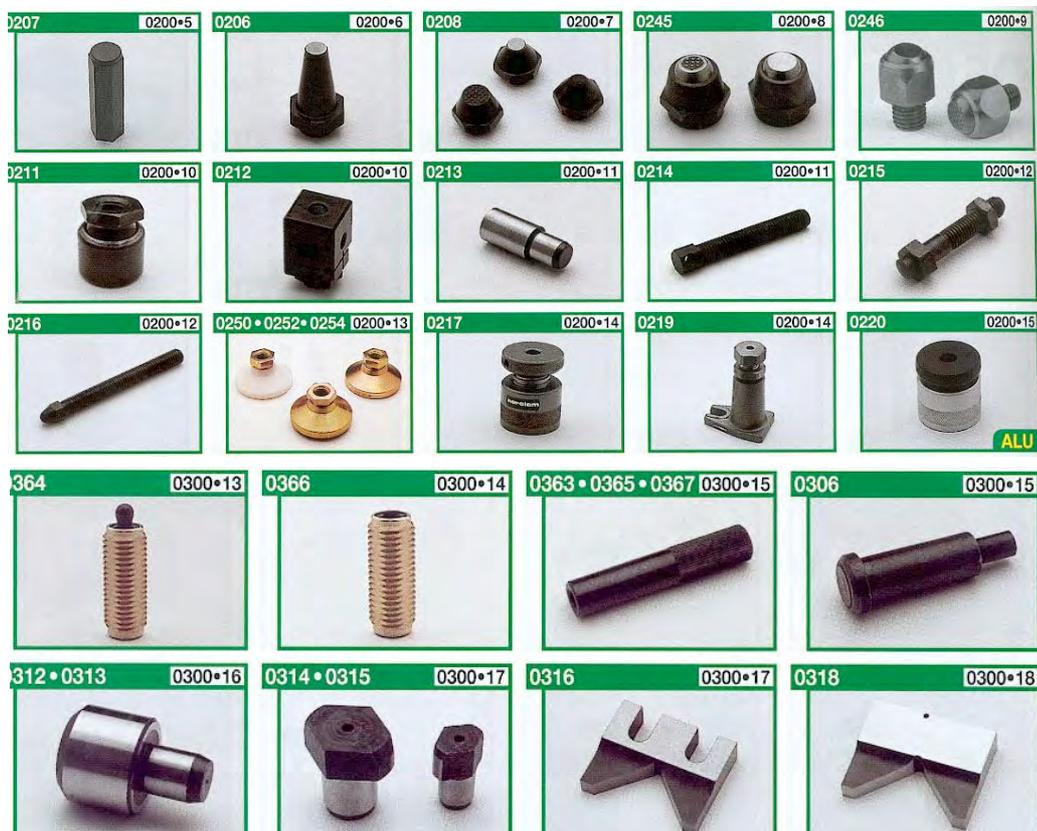
L'immobilisation de la machine pour changement de production est ainsi minimisée. Une mesure de l'origine pièce par rapport à l'origine du montage est réalisée sur MMT ce qui permet de définir, hors machine-outil, le décalage de l'origine du programme de commande numérique.



La modularité des composants constituant un montage d'usinage permet de réduire les coûts. Dans le cas de productions répétitives, les montages d'usinages sont systématiquement recomposés à chaque lancement de production. L'ensemble des composants est ainsi commun à plusieurs montages d'usinage. Le temps de recomposition d'un montage est d'environ 30mn, l'opérateur possède dans ce cas une liste des composants nécessaires et une photographie du montage à recomposer.

Les figures suivantes extraites du catalogue Norelem montrent des exemples de composants.

- exemples de composants permettant de réaliser des appuis



- Exemples de composants pour le bridages



53. MODELE "ISOSTATIQUE" DE POSITIONNEMENT DES SURFACES DE REFERENCES

531. Modèle isostatique

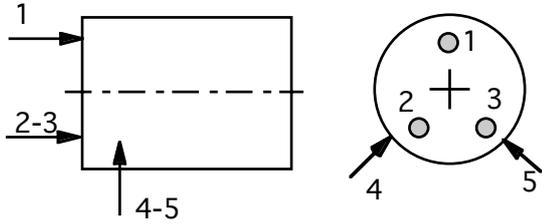
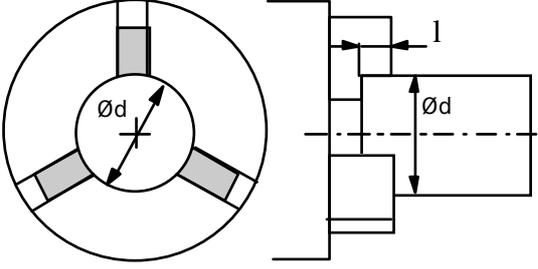
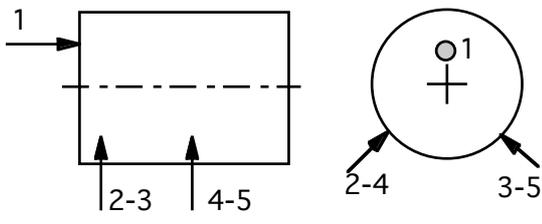
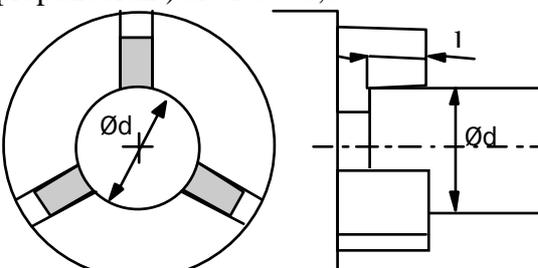
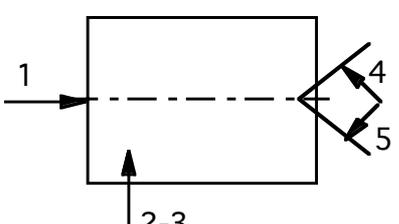
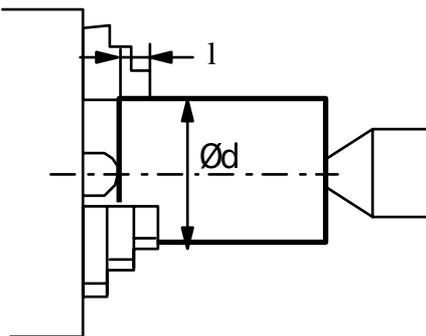
Ce modèle fait l'hypothèse que les surfaces de référence occupent une position unique. La liaison de mise en position des surfaces de référence est composée de plusieurs liaisons élémentaires en parallèles.

Chaque liaison élémentaire met en position l'une des surfaces de référence, chaque liaison est modélisée par les degrés de liberté qu'elle supprime. Exemples de montages d'usinage standards en tournage.

| Type | Liaison (d° lib.) | Outillage | Liaisons cinématiques élémentaires | Liaisons en langage métier | degrés de liberté |
|-------------------------|-------------------|--|------------------------------------|----------------------------|-------------------|
| Montage en l'air | Pivot (5) | Mandrin 3 mors à l'envers | Plane | Appui plan | 3 |
| | | | Linéaire annulaire | Centrage court | 2 |
| Montage en l'air | Pivot (5) | Mandrin 3 mors à l'endroit avec butée axiale | Pivot glissant | Centrage long | 4 |
| Montage mixte | Pivot (5) | Mandrin 3 mors à l'endroit avec butée axiale et Contre pointe mobile | Ponctuelle | Appui ponctuel | 1 |
| | | | Linéaire annulaire | Centrage court | 2 |
| | | | Linéaire annulaire | Centrage court | 2 |
| Montage entre - pointes | Pivot (5) | Pointe fixe Contre-pointe mobile | Sphérique | Rotule | 3 |
| | | | Linéaire annulaire | Centrage court | 2 |

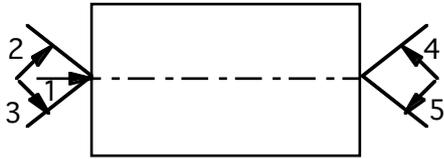
Chaque degré de liberté supprimé sera schématisé soit par une flèche attachée à la surface de référence, soit par une flèche qui relie un cadre indiquant le nombre de degrés de liberté supprimés à la surface de référence correspondante (NF E 04-013).

532. Exemple en tournage ou pour des pièces de révolution

| | |
|--|---|
| <p><u>Montage en l'air :</u> Modélisation cinématique : une liaison plane et une liaison linéaire annulaire</p>  | <p><u>Expérimentalement</u> la pièce reprend la même position (appui plan prépondérant) si : $l/d < 0,2$</p>  <p>Dans ce cas, c'est l'appui plan qui oriente la pièce. Le défaut de coaxialité au droit des mors sera fonction du défaut d'orientation de la surface cylindrique par rapport à la face plane.</p> |
| <p><u>Montage en l'air :</u> Modélisation cinématique : une liaison pivot glissant et une liaison ponctuelle</p>  | <p><u>Expérimentalement</u> la pièce reprend la même position (centrage long prépondérant) si : $l/d > 0,6$</p>  <p>Dans ce cas, au droit des mors, on obtient les défauts de coaxialité suivant : avec des mors dur 0,15 mm et avec des mors doux 0,03mm</p> |
| <p><u>Montage mixte :</u> Modélisation cinématique : le mandrin est modélisé par une liaison linéaire annulaire et une liaison ponctuelle, la contre pointe par une liaison linéaire annulaire</p>  | <p><u>Expérimentalement</u> la pièce reprend la même position si : $l/d < 0,2$ (centrage court et contact ponctuel)</p>  <p>Dans ce cas, au droit des mors, on obtient les défauts de coaxialité suivant : avec des mors dur 0,15 mm et avec des mors doux 0,03mm, le réglage du centrage de la contre pointe avec l'axe de rotation du tour et la qualité du trou de centre sont nécessaires pour assurer la cylindricité des surfaces cylindriques usinées.</p> |

Montage entre pointes :

Modélisation cinématique : la pointe tournante est modélisé par une liaison sphérique et la contre pointe par une liaison linéaire annulaire



Expérimentalement

La qualité des cylindres usinés dépend directement de l'alignement de la pointe et de la contre pointe avec l'axe de rotation du tour (défaut de conicité). La réalisation des 2 trous de centre de la pièce doit être soignée. En effet un défaut d'alignement des axes de ces deux centres provoque une variation périodique du comportement, sous efforts de coupe, des deux liaisons sphérique et linéaire

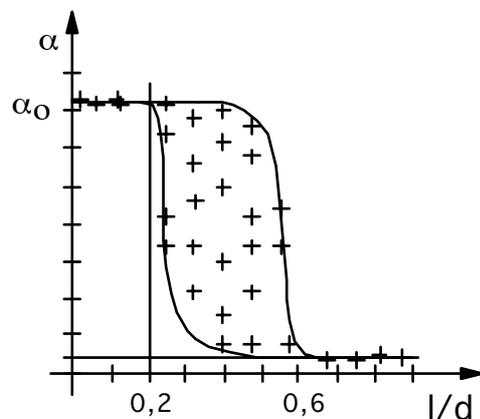
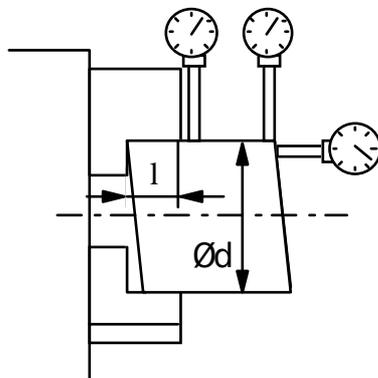
annulaire qui provoquent un défaut de cylindricité des cylindres usinés. L'entraînement en rotation est assuré le plus souvent par une pointe à picots, la dispersion axiale de mise en position est alors fonction de la variation de l'effort exercé par la contre-pointe et de la qualité géométrique de l'extrémité de la pièce. Il est nécessaire de contrôler l'effort axial exercé par la contre-pointe pour garantir un couple transmissible. Ce montage est essentiellement prévu pour réaliser des surfaces cylindriques coaxiales à l'axe des centres de la pièce, sans positionnement axial précis.

533. Mesure des écarts dans le cas d'un montage en l'air.

Le montage expérimental suivant permet de définir le comportement géométrique de la liaison entre le mandrin et la pièce. Les pièces tests utilisées sont des cylindres de qualité métrologique (sans défaut de cylindricité significatif) limités chacun par deux faces parallèles (sans défauts de forme et de parallélisme significatifs) inclinées d'un angle $\alpha_0 = 10^\circ$ par rapport à l'axe du cylindre.

Les pièces tests réalisées permettent de faire varier le rapport l/d ou l est la longueur des mors en contact avec la partie cylindrique de la pièce et d le diamètre de la pièce.

Suite à de nombreux montages et démontage de chaque pièce test dans des conditions normales d'utilisation du mandrin; en reportant graphiquement les valeurs des angles α mesurés entre l'axe du cylindre et l'axe de rotation du tour, de façon générale on met en évidence deux bornes caractéristiques du comportement de la liaison. La liaison plane est prépondérante pour un rapport $l/d < 0,2$, et la liaison pivot glissant est prépondérante pour $l/d > 0,6$. Entre ses deux bornes, la mise en position de la pièce test est incertaine et doit être évitée, en effet dans ce cas il faut, à l'aide d'une massette et d'un comparateur, effectuer un ajustement "manuel" de la liaison prépondérante désirée.



534. Représentations symboliques d'un montage d'usinage

Deux niveaux de représentation symbolique sont utilisés :

- une représentation des degrés de liberté supprimés par la liaison de mise en position des surfaces de référence et,
- une représentation des éléments technologiques d'appui (mise en position des surfaces de références) et de maintien (bridage).

5341. représentation des degrés de liberté supprimés :

Chaque liaison est représentée par les degrés de liberté supprimés.

1^{ère} symbolisation : Une seule flèche par degré de liberté supprimé. Chaque flèche est numérotée de 1 à n, où n correspond au nombre total de degrés supprimé par l'ensemble des liaisons ($n \leq 6$). Bien que les flèches soient judicieusement placées sur les surfaces de référence pour représenter les "normales de repérage minimales" de la surface, les flèches ne représentent pas les points d'appui physiques du montage réalisé. Par exemple une liaison plane, réalisée par trois appuis locaux ou par une surface continue rectifiée sera représentée par trois flèches; de la même façon un mandrin à trois mors concentrique, malgré l'existence de trois zones de contact sera représenté par deux flèches à 90°.

| Première symbolisation | Deuxième symbolisation |
|------------------------|------------------------|
| | |
| | |

2^{ème} symbolisation : Une flèche par liaison élémentaire, attachée à un cadre indiquant le nombre de degrés de liberté supprimés par chaque liaison.

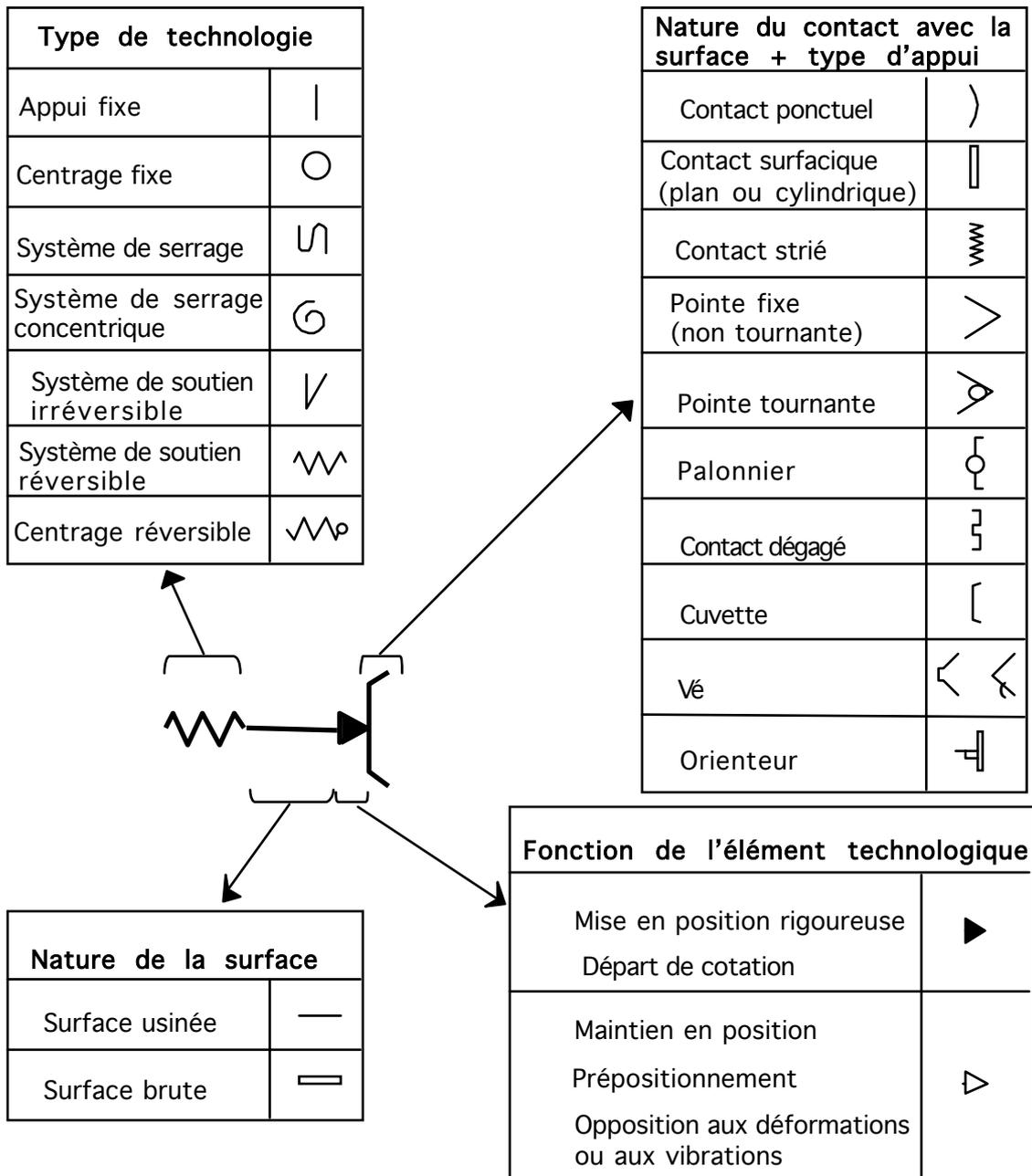
Remarque : Dans les deux symbolisations, seuls les degrés liberté supprimés sont représentés, le maintien en position n'est pas représenté par le symbole de la solution technologique (§ suivant).

5342. Représentation des solutions technologiques

La norme NF E 04-013 définit la symbolisation des solutions technologiques de prises de pièces, c'est-à-dire la symbolisation des éléments d'appui des surfaces de référence et des éléments de maintien en position. Cette symbolisation ne doit pas figurer sur les documents portant la symbolisation des degrés de liberté supprimés.

Le tableau suivant présente succinctement le principe d'établissement des symboles, pour plus de détail se reporter à la norme NF E 04-013 (16 pages)

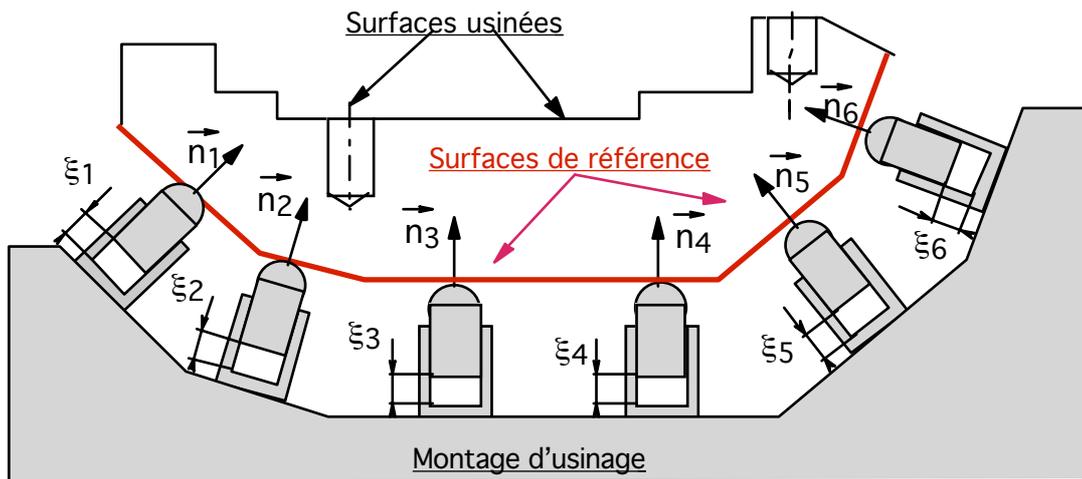
Chaque symbole est construit à l'aide de quatre symboles élémentaires permettant de préciser : le type de technologie, la nature de la surface, la fonction de l'élément et la nature du contact et/ou le type d'appui.



54. MODELE "ISOSTATIQUE" AVEC PRISE EN COMPTE DES DEFAUTS

541. Modèle proposé

On peut considérer le montage d'usinage comme un amplificateur de défauts. En effet, les écarts de mise en position des surfaces de référence par rapport à une position idéale sont dus à la variation de position des points de contact entre les appuis et les surfaces de la pièce. On peut donc considérer que la position de chaque contact varie d'un écart ξ_i suivant la normale au contact. À chaque ensemble de six écarts ξ_i $\{i=1\dots6\}$, correspond un écart de position du repère attaché aux surfaces de référence, cet écart peut-être exprimé par un torseur de petits déplacements.



La mise en équation est immédiate.

Dans un repère $\{O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ associé à la position idéale de la pièce dans le montage d'usinage (tous les $\xi_i = 0$), le petit déplacement des surfaces de référence, qui est dû à un ensemble de valeurs prises par chaque ξ_i , est défini au point O par le torseur :

$$T_O \left| \begin{array}{c} \vec{R} \\ \left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array} \right. \\ \vec{D}_O \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \\ w \end{array} \right. \end{array} \right|$$

Si I_i est le point de position idéale d'un contact, le déplacement du point de contact suivant la normale \vec{n}_i est :

$$(\vec{D}_{I_i}) \cdot \vec{n}_i = \xi_i$$

$$\text{Soit : } (\vec{D}_O + I_i \vec{O} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{n}_i = \xi_i$$

$$\text{Et } \vec{D}_O \cdot \vec{n}_i + (O \vec{I}_i \wedge \vec{n}_i) \cdot \vec{R} = \xi_i$$

Cette expression peut-être écrite sous la forme du comoment du torseur de petit déplacement $T_O \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{D}_O \end{array} \right.$

Et du torseur des coordonnées plückériennes du vecteur \vec{n}_i : $[Pi]_O \left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_i \\ O \vec{I}_i \wedge \vec{n}_i \end{array} \right.$

$$\text{Soit sous forme condensée : } [Pi]_O \cdot T_O = \xi_i$$

On obtient un système de 6 équations linéaires à 6 inconnues qui en posant :

$$\vec{n}_i = a_i \vec{x} + b_i \vec{y} + c_i \vec{z}$$

et $O\vec{I}_i \wedge \vec{n}_i = l_i \vec{x} + m_i \vec{y} + n_i \vec{z}$

peut-être mis sous de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & l_1 & m_1 & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & l_2 & m_2 & n_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & l_3 & m_3 & n_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & l_4 & m_4 & n_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & l_5 & m_5 & n_5 \\ a_6 & b_6 & c_6 & l_6 & m_6 & n_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{pmatrix}$$

Si le déterminant de la matrice des coordonnées plückériennes des vecteurs \vec{n}_i est différent de zéro, le système est isostatique et la mise en position est de rang 6 (les 6 degrés de liberté sont éliminés).

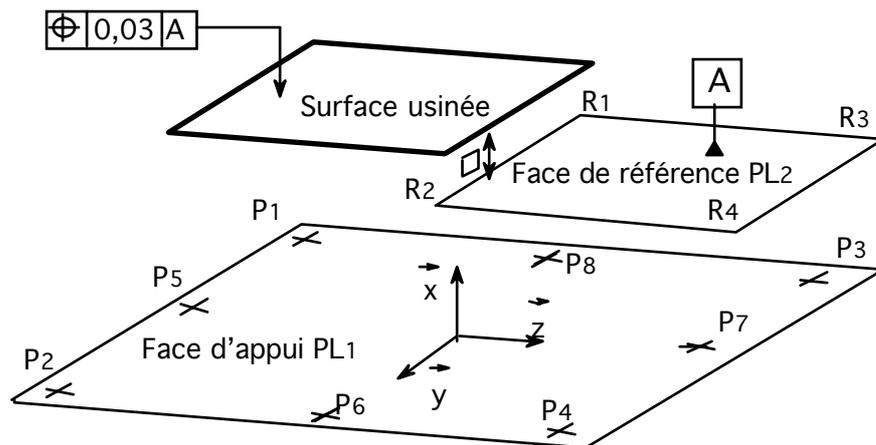
Si le déterminant de la matrice est nul, la mise en position de la pièce possède au moins un degré de liberté. En cherchant le rang de la matrice on définit ainsi le rang de la mise en position et par suite le nombre de degrés de liberté supprimés.

542. Exemples de simulation d'un montage d'usinage (facteurs d'influences) :

5421. Comparaison entre plusieurs solutions de mise en position :

Une face plane PL1 de contour rectangulaire est mise en position dans un montage d'usinage par trois appuis ponctuels. Quelle est la meilleure disposition des trois appuis qui minimise la dispersion de mise en position d'une face plane de référence idéale PL2 en projection sur un axe perpendiculaire à la face PL2 ?

On cherche ici à minimiser la contribution à la tolérance de localisation de 0,03 mm, du seul choix de la mise en position de la pièce dans son montage d'usinage. La tolérance de localisation sera bien entendu la somme de deux dispersions supplémentaires, celle résultant de l'outil (surface usinée) et celle résultant de la réalisation de la position relative de la face de référence PL2 par rapport à la face d'appui PL1



Hypothèses :

- la qualité de chacun des appuis est identique (même valeur de l'intervalle de variation de chaque ξ_i),
- le problème étant linéaire la meilleure position des appuis sera sur le contour de la face rectangulaire.
- la face de référence PL2 est considérée en position théoriquement exacte par rapport à la face d'appui PL1.

Afin de limiter le nombre de cas à comparer, les trois appuis seront choisis parmi huit points d'appuis P_i potentiellement les meilleurs. Quatre points, aux sommets du rectangle $\{P_1...P_4\}$, et quatre points au milieu de chacun des cotés $\{P_5...P_8\}$. (voir figure ci-dessous)

Il existe 2^8 combinaisons possibles (256). Étudions pour une combinaison k , la variation de mise en position de la face PL2 due aux variations de mise en position des trois d'appui P_j choisis.

Le torseur de petit déplacement exprimé au point O est de la forme

$$T_o \left| \begin{array}{c} \bar{R} \\ \bar{D}_o \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ - \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{c} - \\ - \\ w \end{array} \right.$$

Sachant que chaque point P_j a pour composantes $(X_j\bar{x}, Y_j\bar{y}, 0\bar{z})$ et que chaque normale unitaire aux points P_j a pour composantes $(0\bar{x}, 0\bar{y}, 1\bar{z})$

Pour la combinaison k (par exemple $j \{1, 2, 7\}$) Les trois petits déplacements sont donnés par la solution du système :

$$\begin{vmatrix} 1 & Y_1 & -X_1 \\ 1 & Y_2 & -Y_2 \\ 1 & Y_7 & -Y_7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_7 \end{vmatrix}$$

En prenant chacun des écarts à son maximum puis à son minimum, en les combinant on obtient pour une combinaison k de 3 appuis, 2^3 torseurs T_t extrêmes (avec $t\{1...8\}$).

Il est possible de calculer pour les quatre points d'intérêt, $R_1 R_m...R_4$ de la surface de référence, les écarts $E_{k,t,m}$ dus à chaque torseur extrême :

$$E_{k,t,m} = w_{k,t} - X_{R_m} \beta_{k,t} + Y_{R_m} \alpha_{k,t}$$

On retient pour une combinaison k l'intervalle de variation de $E_{k,t,m}$

$$\Delta E_{k,t,m} = \sup(E_{k,t,m}) - \inf(E_{k,t,m}) \quad \text{avec } t \{1...8\} \text{ et } m \{1,2,3,4\}$$

En faisant varier les combinaisons k des points d'appui on retient la solution qui donne la valeur de $\Delta E_{k,t,m}$ minimum

Remarque : Cette simulation peut être appliquée à la recherche automatique de la position des points d'appui donnant la meilleure mise en position d'une ou de plusieurs surfaces de référence. Pour cela toutes les surfaces d'appui potentielles de la pièce sont quadrillées. Chaque point du quadrillage pouvant être un point de contact avec le montage d'usinage, toute combinaison de points de contact donnant une solution peut être systématiquement calculé. Afin de limiter le calcul de toutes les combinaisons de solutions de montage d'usinage (nombre de combinaisons trop important), on lui préfère une méthode dite de Monté Carlo, où chaque combinaison est obtenue par tirage aléatoire, le nombre maxi de tirages est dans ce cas limité par le choix d'une durée de traitement informatique.

De manière plus générale l'expression du déplacement E_{R_i} en un point d'intérêt R_i de coordonnées $(X_{R_i}, Y_{R_i}, Z_{R_i})$ en projection suivant une direction $\vec{n}_i (a_i, b_i, c_i)$ peut s'écrire en fonction des écarts ξ_i sous la forme d'une relation linéaire :

$$E_{R_i} = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 + k_4\xi_4 + k_5\xi_5 + k_6\xi_6$$

Où les coefficients k_i sont les coefficients d'influence de la contribution de chacun des écart ξ_i au déplacement E_{R_i} du point d'intérêt R_i (ils peuvent être exprimer en %)

5422. Simulation d'un liaison linéaire annulaire réalisé par un montage en mors doux

Cette liaison élimine deux degrés de liberté, dans le cas de mors doux, le défaut de coaxialité au droit des mors est de 0,03 mm. Le centre de la surface de révolution de la pièce est donc situé au droit des mors dans un cercle de diamètre $\varnothing=0,03$ mm.

La liaison peut-être est modélisée par deux contacts ponctuels situés à 90° , chaque contact ponctuel possède un écart ξ_i variant dans l'intervalle $\pm 0,015$ mm.

Si comme précédemment, les écarts ξ_i étaient indépendants, le centre de la pièce décrirait une zone de tolérance de forme carré.

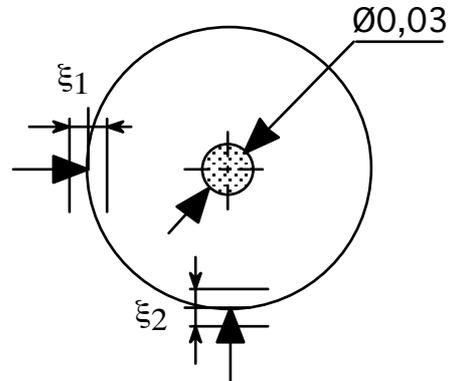
Un changement de variable permet d'obtenir une zone de tolérance circulaire.

En posant

$$\xi_1 = 0,015 \cos \theta$$

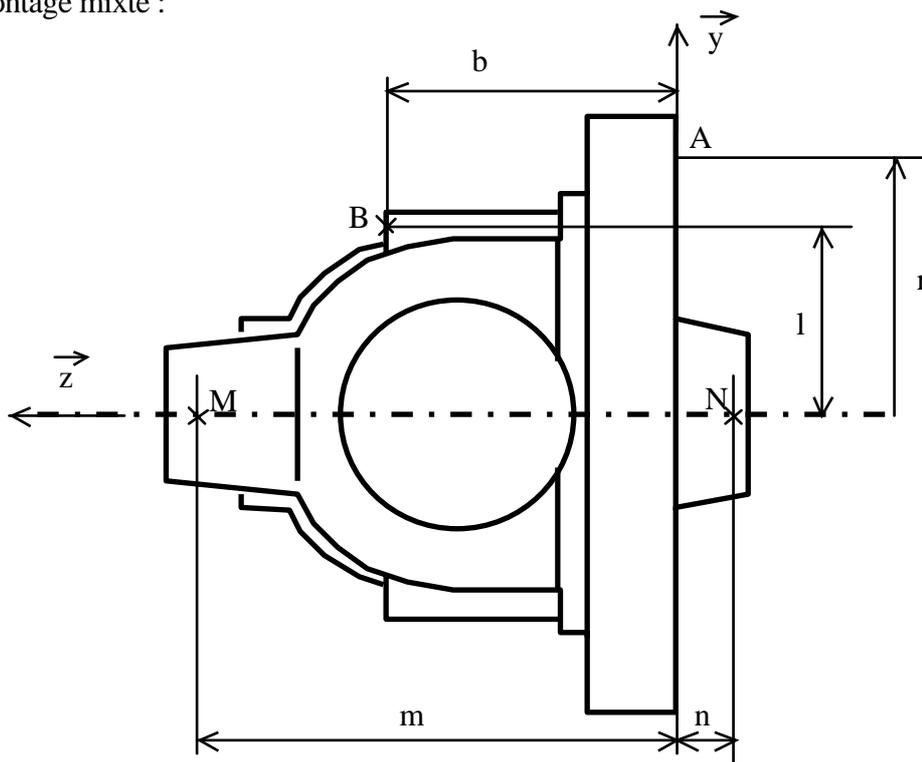
$$\xi_2 = 0,015 \sin \theta$$

avec dans ce cas $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$



5423. Simulation d'un montage d'usinage pour déterminer une variation d'épaisseur de copeaux et mise en évidence des facteurs d'influences

La pièce définie sur la figure ci dessous est mise en position sur un tour par un montage mixte :



Un mandrin 3 mors à serrage concentrique assurant un centrage court dans le plan passant par le point M

Une pointe creuse assurant un centrage court dans le plan passant par le point N

Une butée axiale en contact au niveau du point B

Il s'agit ici d'estimer la variation de l'épaisseur de copeaux lors de l'usinage de la face F sur une série de pièces.

Cette variation est la somme de deux variations : une variation de la géométrie des pièces brutes et une variation due à la « qualité » du montage d'usinage. Ces deux variations se cumulent et nous nous intéressons ici à la seule influence du montage d'usinage.

La pratique de ce type de montage mixte sur une pièce brute permet d'estimer les valeurs des écarts de mise en position de la pièce par :

le défaut de concentricité d'un mandrin 3 mors : $\varnothing 0,5$ mm :

l'étendue de la variation des écarts au point de contact B : 0,2 mm ;

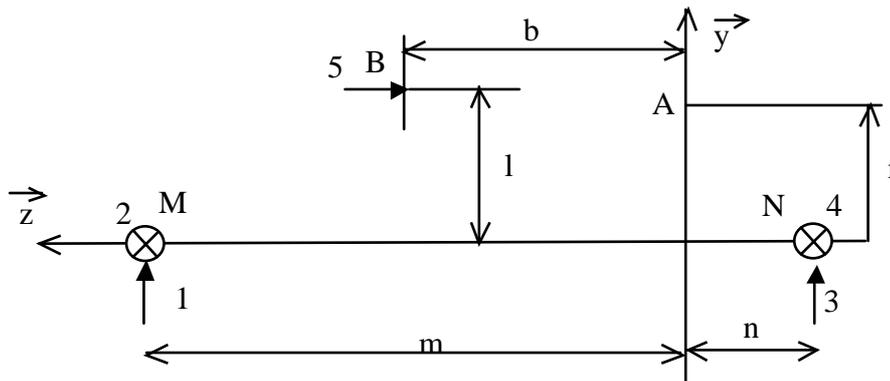
enfin le défaut de concentricité de la point creuse : 0,5 mm

Le déplacement de la pièce, du au défaut des liaisons avec le montage d'usinage (déplacement d'un corps rigide) peut être caractérisé, au point A, par un torseur de petit déplacement.

$$T_A \left| \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{D}_A \end{array} \right\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \\ w \end{array} \right. \quad \text{la rotation autour de l'axe z est indéterminée}$$

On modélise le montage d'usinage par 5 contacts ponctuels.

Soient $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5$ modélisant les écarts aux 5 contacts ponctuels



Pour tout point I, (I_1 et I_2 au point M, I_3 et I_4 au point N et I_5 au point B)

$$\text{On a la relation} \quad \vec{D}_A \cdot \vec{n}_i + (\vec{A}I_i \wedge \vec{n}_i) \cdot \vec{R} = \xi_i$$

Avec :

$$\begin{array}{ccccc} \vec{n}_1 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right. & \vec{n}_2 \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. & \vec{n}_3 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right. & \vec{n}_4 \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. & \vec{n}_5 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right. \\ \vec{AI}_1 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -r \\ m \end{array} \right. & \vec{AI}_2 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -r \\ m \end{array} \right. & \vec{AI}_3 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -r \\ -n \end{array} \right. & \vec{AI}_4 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -r \\ -n \end{array} \right. & \vec{AI}_5 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -r + l \\ b \end{array} \right. \\ \vec{AI}_1 \wedge \vec{n}_1 \left\{ \begin{array}{l} -m \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. & \vec{AI}_2 \wedge \vec{n}_2 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -m \\ -r \end{array} \right. & \vec{AI}_3 \wedge \vec{n}_3 \left\{ \begin{array}{l} n \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. & \vec{AI}_4 \wedge \vec{n}_4 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ n \\ -r \end{array} \right. & \vec{AI}_5 \wedge \vec{n}_5 \left\{ \begin{array}{l} r - l \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On obtient ainsi 5 équations linéaires à 5 inconnues (α, β, u, v, w)

$$v - m\alpha = \xi_1 \quad (1)$$

$$-u - m\beta = \xi_2 \quad (2)$$

$$v + n\alpha = \xi_3 \quad (3)$$

$$-u + n\beta = \xi_4 \quad (4)$$

$$-w + (r-1)\alpha = \xi_5 \quad (5)$$

Soit les écarts au point A :

$$(3) - (1) \quad \alpha = \frac{\xi_3 - \xi_1}{m+n}$$

$$v = \xi_1 + \frac{m(\xi_3 - \xi_1)}{m+n}$$

$$(4) - (2) \quad \beta = \frac{\xi_4 - \xi_2}{m+n}$$

$$w = (r-1) \frac{\xi_3 - \xi_1}{m+n} - \xi_5$$

$$u = \frac{m(\xi_4 - \xi_2)}{m+n} - \xi_4$$

Le déplacement du point A suivant \vec{z} peut-être écrit sous la forme :

$$w = -\frac{(r-1)}{m+n} \xi_1 + 0 \times \xi_2 + \frac{(r-1)}{m+n} \xi_3 + 0 \times \xi_4 - \xi_5 \quad (6)$$

les coefficients des ξ_i représentent la contribution des contacts ponctuels dans l'évaluation du déplacement w (coefficients d'influence).

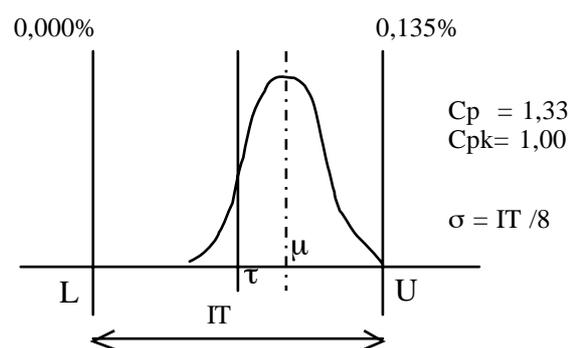
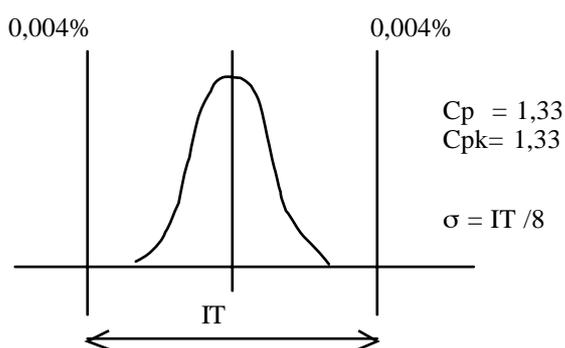
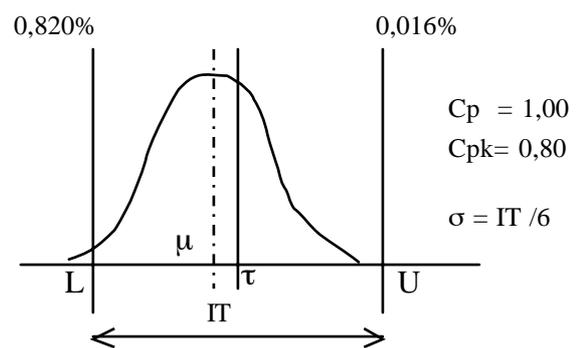
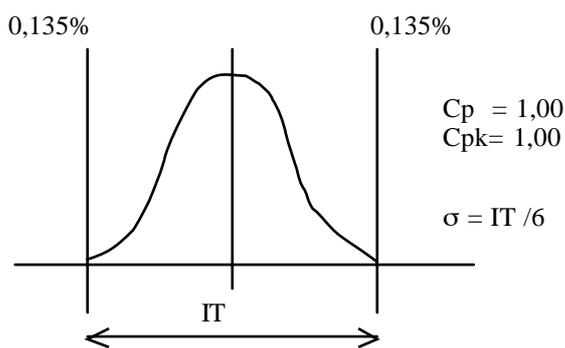
Chaque ξ_i peut varier dans un intervalle $\Delta\xi_i$ l'intervalle de variation de w est :

$$\Delta w = \frac{|r-1|}{m+n} (\Delta\xi_1 + \Delta\xi_3) + \Delta\xi_5 \text{ et sera maximum pour } r = -80\text{mm}$$

$$\text{avec } l=50 \quad m+n=125 \quad \Delta\xi_1 = 0,5 \quad \Delta\xi_3 = 0,5 \quad \Delta\xi_5 = 0,2$$

$$\text{soit } \Delta w = \frac{130}{125} (0,5 + 0,5) + 0,2 = 1,24\text{mm}$$

Partie 3 : Identification des paramètres de réglage en production



Chap. 6 : Identification des « Cotes de réglage »

=====

6.1 PROBLEME POSE :

La maîtrise des tolérances dimensionnelles et géométriques réalisées dans une phase de fabrication nécessite de définir des caractéristiques dimensionnelles cibles puis de les identifier par mesure de la pièce réalisée pour enfin corriger les paramètres de réglage de la MOCN.

On peut modéliser dans un repère fixe l'ensemble de la chaîne des composants : outil, broche, machine-outil, montage d'usinage, pièce, où toute surface usinée est générée par le déplacement relatif de l'outil/table et où toute surface non usinée est mise en position sur la table par l'intermédiaire d'un montage d'usinage.

Cette chaîne de solides est classiquement appelée «la cellule élémentaire d'usinage» ou chaque composant est identifié par un repère.

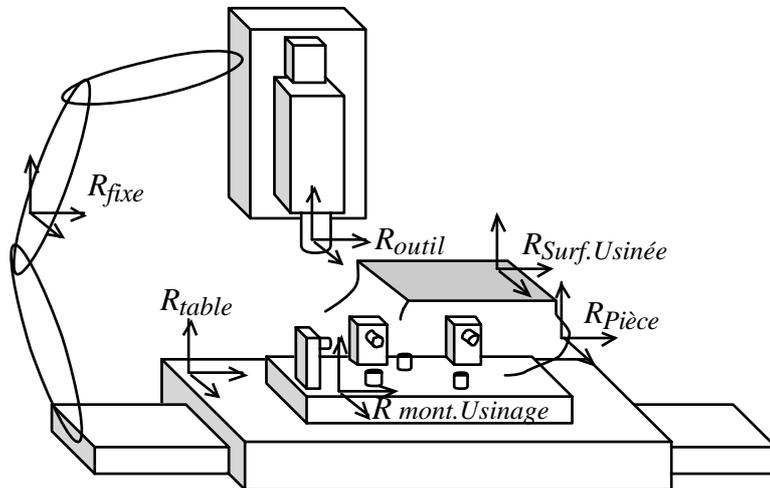


Figure 1 : cellule élémentaire d'usinage

On distingue ainsi les repères suivants :

R_{fixe} : Repère fixe dans lequel sont programmés les déplacements relatifs de la MOCN, c'est-à-dire les déplacements du repère outil par rapport au repère de la table

R_{outil} : Dans le cas d'un outil tournant le repère est par exemple défini par le point piloté de l'outil et son axe de rotation, et dans le cas d'un outil fixe il est par exemple défini par le porte-outil.

R_{table} : Repère lié à la table de la MOCN, il peut par exemple être défini par la surface plane de la table, la direction des rainures et par un centreur.

$R_{montage d'usinage}$: Repère lié à la liaison montage d'usinage /table défini par exemple par la surface plane de contact avec la table, un centreur et un lardon de centrage.

$R_{de\ posage}$: Repère défini par les appuis du montage (qui assure la mise en position de la pièce)

$R_{pièce}$: Repère lié à la pièce défini par des surfaces non usinées.

$R_{surf. Usinée}$: Repères attachés à chaque surface usinée (éléments de situation des surfaces usinées)

L'identification de ces différents repères se fait par mesure d'entités géométriques, qui peuvent aussi bien appartenir à la pièce fabriquée, au montage d'usinage qu'à l'outil.

6.2 RAPPEL SUR LE MODELE DE DEFINITION D'UNE ENTITE GEOMETRIQUE

6.2.1 Éléments (intégraux) extraits

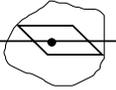
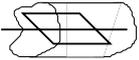
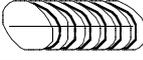
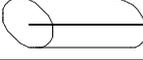
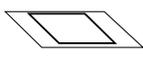
Tout élément géométrique fabriqué appartient à la peau de la pièce, c'est-à-dire à l'interface entre la matière et son environnement. On distingue trois types d'élément le point extrait, la ligne extraite et la surface extraite. Le point extrait est à l'intersection d'une droite et de la peau de la pièce. La ligne extraite et la surface extraite sont définies par un ensemble fini de points extraits de la peau de la pièce. Les points de la ligne extraite sont à l'intersection d'une surface idéale et de la peau de la pièce, si la ligne extraite est ouverte, elle est limitée par deux points extrêmes, la surface extraite est limitée par un contour fermé (ligne extraite).

6.2.2 Éléments dérivés extraits

À partir d'un éléments extraits, il est possible de définir par des opérations d'association et de construction, des éléments dérivés extraits. Par exemple l'axe réel d'un cylindre, le plan médian réel de deux surfaces réputée planes et parallèles etc...

6.2.3 Éléments idéaux

Un élément idéal ou une collection d'éléments idéaux appartiennent à l'une des 7 classes d'invariance de surface. Chaque classe de surface est définie par son degré d'invariance, ses éléments de situation (point, droite, plan) et par des paramètres intrinsèques à l'élément ou à la collection d'éléments idéaux.

| Illustration | Classe d'invariance | Degré d'invariance | | Éléments de situation minimum |
|---|---------------------|--------------------|---|-------------------------------|
|  | complexe | 0 | Aucun | plan droite point |
|  | prismatique | 1 | Une translation le long d'une droite d'un plan | plan droite |
|  | révolution | 1 | Une rotation autour d'une droite pointée | droite point |
|  | hélicoïdale | 1 | Une translation et une rotation liées | Droite orientée |
|  | cylindrique | 2 | Une translation et une rotation autour d'une droite | droite |
|  | plane | 3 | Une rotation perpendiculaire au plan et deux translations le long de deux droites du plan | plan |
|  | sphérique | 3 | Trois rotations autour d'un point | point |

Les éléments de situation sont ici les éléments de référence minimum qui sont définis à partir d'un élément ou d'une collection d'éléments appartenant à la classe d'invariance.

6.3 ASSOCIATION D'UNE FORME GEOMETRIQUE IDEALE A UN ENSEMBLE DE POINTS

Quelle que soit la forme idéale étudiée (constituée d'un élément ou d'une collection d'éléments) on peut formuler le problème d'association sous la forme générale suivante.

La forme idéale peut toujours être défini, dans un repère $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ par un tableau $(x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i)$ composé des coordonnées x_i, y_i, z_i des points théoriques M_{thi} de la surface idéale et des cosinus directeurs a_i, b_i, c_i des normales \vec{n}_i en ces points (Figure 2).

L'élément géométrique réel est obtenu par un ensemble d'écart de mesure ξ_i représentant les distances euclidiennes des points M_i de la surface réelle, mesurées suivant les normales \vec{n}_i à la surface idéale $\xi_i = \overrightarrow{M_{thi}M_i} \cdot \vec{n}_i$ (Figure 2)

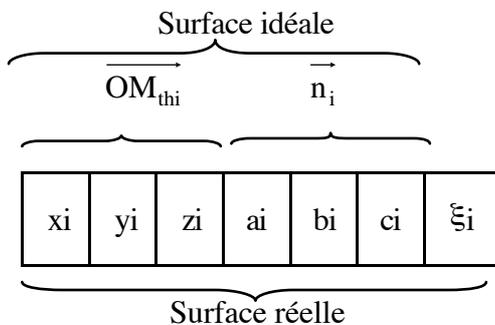


Figure 2

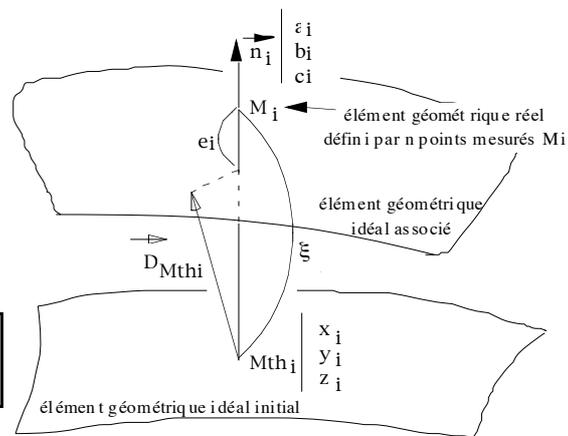


Figure 3

Les valeurs prises par l'ensemble des écarts ξ_i varient en fonction du choix de la position de la surface idéale par rapport à l'ensemble des points M_i (Figure 3).

À partir d'une position initiale de la surface idéale (corps rigide), cherchons à exprimer le petit déplacement qui permettra d'ajuster au mieux la surface idéale au nuage de points M_i .

Désignons par $[T_A] \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{D}_A \end{cases}$ l'expression au point A du torseur de petits déplacements

qui doit permettre de faire passer l'élément géométrique initial de la position actuelle à une position optimisée telle, qu'elle coïncide d'une manière significative avec l'ensemble des points mesurés.

L'élément géométrique optimisé n'est jamais superposable à l'ensemble des points mesurés, c'est-à-dire que tout point M_{thi} ne vient pas nécessairement en M_i (ceci ne serait possible que si la surface réelle était parfaite, ou comme nous l'avons pour la mise en position d'une surface dans un montage d'usinage si le nombre de points mesurés était égal au rang de la surface). On minimise les écarts de superposition en effectuant un petit déplacement $\overrightarrow{D_{M_{thi}}}$ tel que la position finale de tout point théorique M_{thi} soit globalement le plus près possible du plan tangent au point mesuré M_i .

Ce qu'on peut écrire algébriquement :

$$\vec{e}_i = \xi_i - \overrightarrow{D_{M_{thi}}} \cdot \vec{n}_i \quad (1)$$

Le champ de déplacements infiniment petits, étant un champ de moment, on a, à partir d'un point de référence A :

$$\vec{D}_{Mthi} = \vec{D}_A + \vec{Mth}_i \wedge \vec{R}$$

L'équation (1) devient :

$$e_i = \xi_i - (\vec{D}_A \cdot \vec{n}_i + (\vec{D}_A \cdot \vec{Mth}_i \wedge \vec{n}_i) \cdot \vec{R})$$

Sous cette forme, la parenthèse de l'équation représente le comoment du torseur de petits déplacements

$$[T_A] \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{D}_A \end{array} \right.$$

et du torseur des coordonnées plückériennes du vecteur

$$[P_i]_A \left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_i \\ \vec{AM}_{th_i} \wedge \vec{n}_i \end{array} \right.$$

soit sous forme condensée

$$e_i = \xi_i - ([P_i]_A \cdot [T_A])$$

si la surface possède un ou plusieurs paramètres intrinsèques variables (rayon du cylindre par exemple) leurs variations peuvent être introduites dans l'équation précédente comme une inconnue supplémentaire δr_i agissant sur la position initiale du point I.

$$e_i = \xi_i - \delta r_i - ([P_i]_A \cdot [T_A])$$

Dans le cas par exemple d'un cylindre, la variation du rayon δr_i sera la même pour tous les points de la surface.

On écrit une relation analogue pour chacun des n points de mesure. On obtient un système de n équations linéaires pour r inconnues, c'est-à-dire les r composantes du torseur de petits déplacements (voir annexe 1 pour la définition des torseurs de petits déplacements des différents éléments géométriques).

Si le nombre de points définissant la surface était uniquement de r et judicieusement choisi, on obtiendrait un système de r équations linéaires indépendantes et on aurait une solution avec :

$$e_1 = e_2 = \dots e_i \dots = e_r = 0$$

c'est-à-dire une superposition des r points mesurés aux r points de l'élément géométrique initial. Mais r points de mesure sont insuffisants pour donner l'image de la forme de la pièce, et dans tous les cas, nous aurons un nombre de points n, très supérieur à r, en conséquence nous sommes en présence d'un système de n équations linéaires pour r inconnues avec dans tous les cas $n \geq r$.

Ce système de n équations linéaires à r inconnues peut être résolu suivant différentes méthodes et par suite différents critères d'optimisation. Par exemple :

- le critère des moindres carrés (ou critère de Gauss) pour obtenir une répartition statistique des écarts optimisés e_i autour de l'élément géométrique optimisé,
- une méthode de programmation linéaire permettant de minimiser ou de maximiser une fonction objectif, telle que le minimax des écarts optimisés

6.3.1 Critère des moindres carrés (ou norme 2)

On obtient un système de n équations linéaires à r inconnues

$$e_i = \xi_i - \delta r_i - (\overrightarrow{D_A.n_i} + (\overrightarrow{D_A.Mth_i} \wedge \overrightarrow{n_i}).\overrightarrow{R})$$

On forme la fonction W constituée par la somme des e_i^2

$$W = \sum e_i^2$$

Cette fonction W passe par un minimum que l'on obtient en écrivant que les r dérivées partielles de la fonction W sont égales à zéro. Dans le cas d'une surface de rang 6 avec un paramètre intrinsèque δr on obtient :

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0 & \frac{\partial W}{\partial \beta} = 0 & \frac{\partial W}{\partial \gamma} = 0 & \\ \frac{\partial W}{\partial u} = 0 & \frac{\partial W}{\partial v} = 0 & \frac{\partial W}{\partial w} = 0 & \frac{\partial W}{\partial r} = 0 \end{array}$$

Ce système est évidemment linéaire et la résolution donne un torseur de petit déplacement ($\alpha, \beta, \gamma, u, v, w$) et la variation du paramètre intrinsèque δr qui représentent le déplacement et la variation de l'élément géométrique initial pour l'amener au mieux des points palpés.

6.3.2 Critère du mini-max (ou norme ∞)

La résolution du problème nécessite l'utilisation d'un solveur que l'on trouve dans toutes les bibliothèques de logiciels (matlab, excel, mathematica ...). Le problème est mis sous la forme d'une suite d'inéquations ou d'équation à satisfaire et d'une fonction objectif à atteindre. Dans le cas ici ou toutes les relations sont linéaires, on peut utiliser une résolution par la méthode du simplexe.

Prenons l'exemple où l'on désire minimiser l'écart de forme. Pour cela soient e_{max} et e_{min} deux inconnues supplémentaires représentant les écarts maxi et mini optimisés.

La solution recherchée devra pour chaque point, satisfaire une condition d'appartenance à la zone de tolérance. Ce qui peut s'écrire sous la forme des deux conditions :

tout écart e_i devra être inférieur ou égal à l'écart maxi, : $e_{max} - e_i \geq 0$

tout écart e_i devra être supérieur ou égal à l'écart mini : $e_{min} - e_i \geq 0$

Avec pour fonction objectif ($e_{max} - e_{min}$) à minimiser.

6.4 IDENTIFICATION DES « COTES DE REGLAGE »

La commande des déplacements d'une MOCN se fait par une succession de déplacements programmés par des coordonnées de points (et de normales en 5 axes).

Chaque entité usinée sera identifiée par :

- les éléments de situation de l'entité idéale associée à l'entité usinée ;
- par les paramètres intrinsèques à l'entité idéale associée à l'entité usinée ;
- par les défauts de forme de l'entité usinée.

Le positionnement relatif de deux entités usinées sera défini par des distances et des angles calculés entre les éléments de situation des entités idéales associées.

Le problème du réglage revient donc à établir une relation entre les coordonnées programmées dans la commande numérique et les caractéristiques dimensionnelles mesurées (intrinsèques et entre deux entités) sur une ou une série de pièces usinées.

6.4.1 Notions de dimension cible et de cote fabriquée

On appelle « dimension cible » la valeur idéale que devrait avoir la moyenne statistique de la caractéristique fabriquée si le processus de fabrication était idéalement réglé.

On admet que les variations du processus de fabrication sont acceptables si la dimension fabriquée reste à l'intérieur d'une zone de tolérance centrée sur une dimension nominale

6.4.2 Modèle statistique d'une cote fabriquée : Définitions

Ces définitions sont issues du groupe de travail WG13 de l'ISO. Elles permettent de prendre en compte la variation statistique des valeurs réelles d'une caractéristique par rapport à une valeur cible.

6.4.2.1 Indices de capabilité :

On note respectivement :

U et L les limites supérieures et inférieures de la zone de tolérance d'une caractéristique Y_k , μ_{Y_k} la moyenne et σ_{Y_k} l'écart type de la loi de probabilité de la population des valeurs de la caractéristique fabriquée,

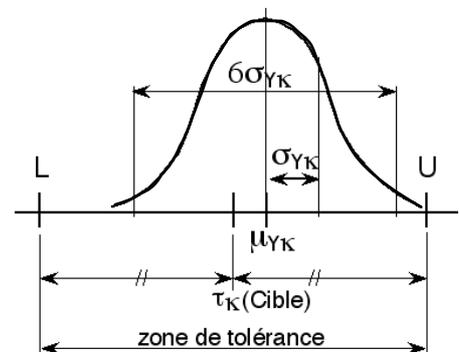
τ_k la spécification cible visée avec $\tau_k = \frac{U - L}{2}$

On définit :

- **L'indice de capabilité C_p** $C_p = \frac{U - L}{6\sigma_{Y_k}}$ (a)

L'intervalle 6σ représente pour une loi normale centrée un risque de 0,28% pour qu'une caractéristique Y_k soit en dehors de l'intervalle (§1.4.5)

C_p exprime donc la répartition de la population autour de sa moyenne μ_{Y_k} .



- **L'indice de capabilité C_c** $C_c = \max(C_{cl}, C_{cu})$

avec $C_{cl} = \frac{\tau_k - \mu_{Y_k}}{\tau_k - L}$ et $C_{cu} = \frac{\mu_{Y_k} - \tau_k}{U - \tau_k}$ (b)

C_c exprime la position de la moyenne de la population par rapport à la cible

- **L'indice de capabilité C_{pk}** $C_{pk} = \min(C_{pl}, C_{pu})$

avec $C_{pl} = \frac{\mu_{Y_k} - L}{3\sigma_{Y_k}}$ et $C_{pu} = \frac{U - \mu_{Y_k}}{3\sigma_{Y_k}}$ (c)

C_{pk} exprime la position et la répartition de la population

- **L'indice de capabilité** C_{pm}
$$C_{pm} = \frac{U - L}{6 \left\{ \sigma_{Yk}^2 + (\mu_{Yk} - \tau_k)^2 \right\}^{1/2}}$$

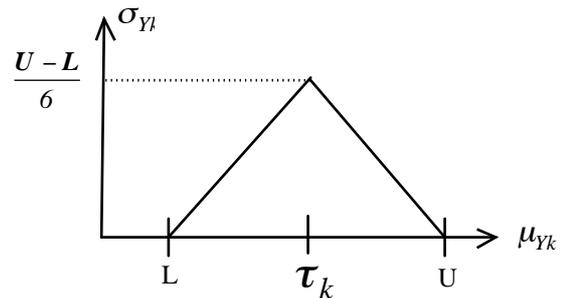
C_{pm} est l'indice de déviation de la racine carrée de l'écart entre la moyenne μ_{Yk} et la valeur cible τ_k . Cet indice est issu de la fonction perte de Tagushi.

6.4.2.2 Zones de tolérance statistique

En utilisant les indices de capabilité, un processus est statistiquement maîtrisé lorsque l'on spécifie les valeurs minimales de C_p , C_{pk} , C_{pm} et la valeur maximale de C_c .

Zone de tolérance statistique à 6 σ

Une zone de tolérance statistique peut-être visualisée dans un plan $\mu_{Yk} - \sigma_{Yk}$. Sans indice de capabilité, cette zone a la forme d'un triangle isocèle centré sur la valeur cible τ_k qui elle-même est centrée sur l'intervalle défini par les deux bornes L et U de la caractéristique Y_k .



Si on fait l'hypothèse que la répartition statistique de la population suit une loi normale. En prenant un risque α de 0,28%,

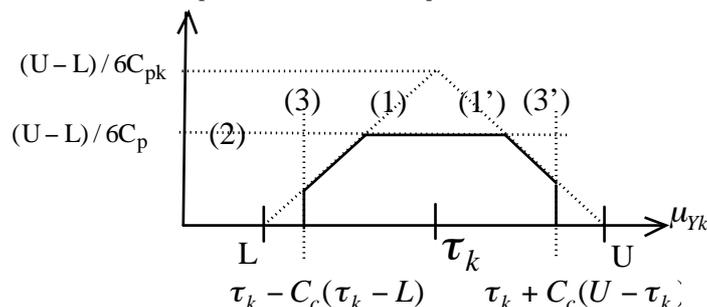
la valeur de l'intervalle estimée de la population est de $6\sigma_{Yk}$. On en déduit immédiatement que la valeur de l'écart-type σ_{Yk} sera maximale lorsque la valeur de la moyenne μ_{Yk} de la population sera centrée sur l'intervalle (L, U), soit $\sigma_{Yk} \max i = (U - L) / 6$ lorsque $\mu_{Yk} = \tau_k$.

Si la valeur de la moyenne μ_{Yk} de la population tend vers la valeur de l'une des bornes L ou M, pour un même risque α de 0,28%, on fait l'hypothèse que la valeur de l'écart-type σ_{Yk} décroît linéairement pour atteindre la valeur théorique zéro aux bornes.

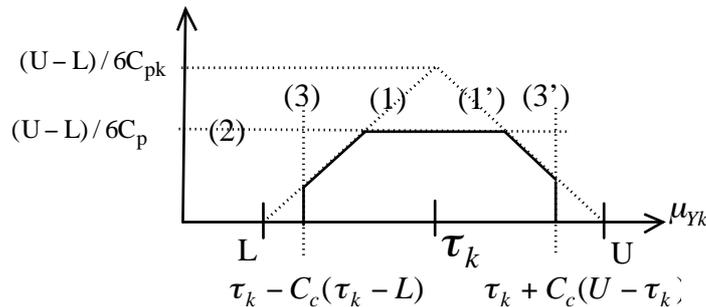
Influence des indices de capabilité sur les limites de la zone de tolérance statistique.

La valeur de l'indice C_{pk} (c'est-à-dire la valeur minimale de C_{pl} ou C_{pu}) limite la variation de la valeur de σ_{Yk} en fonction de la valeur de la moyenne μ_{Yk} . La zone de tolérance statistique est limitée par les deux droites (1) et (1') qui correspondent aux

deux inéquations $\sigma_{Yk} \leq \frac{\mu_{Yk} - L}{3C_{pl}}$ et $\sigma_{Yk} \leq \frac{U - \mu_{Yk}}{3C_{pu}}$ déduites des relations (c) §6.4.2.1



La valeur de l'indice C_p limite la valeur maximale de l'écart-type σ_{Y_k} . La zone de tolérance statistique est limitée par une droite (2) qui correspond à l'inéquation $\sigma_{Y_k} \leq (U - L)/6C_p$ déduite de la relation (a) §6.4.2.1



La valeur de l'indice C_c (c'est-à-dire la valeur maximale de C_{cl}, C_{cu}) limite la valeur prise par la moyenne μ_{Y_k} . La zone de tolérance statistique est limitée par la droite (3) $\mu_{Y_k} \geq \tau_k - C_c(\tau_k - L)$ et la droite (3') $\mu_{Y_k} \leq \tau_k + C_c(U - \tau_k)$ déduites des relations (b) §6.4.2.1

6.4.3 Choix de la valeur cible

Les calculs sur les chaînes de cotes sont faits avec une moyenne centrée sur leur zone de tolérance. En production si la moyenne statistique n'est pas centrée, l'écart-type doit être diminué pour respecter la zone de tolérance.

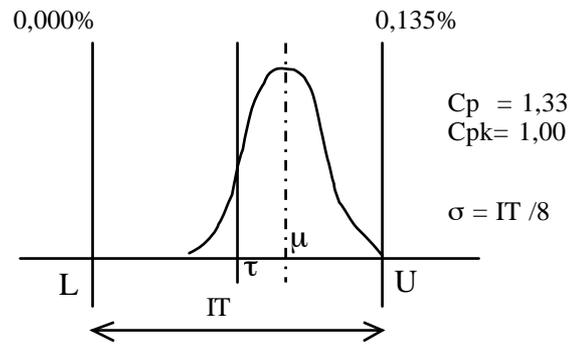
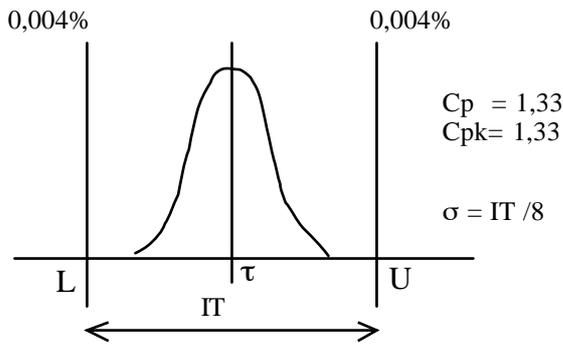
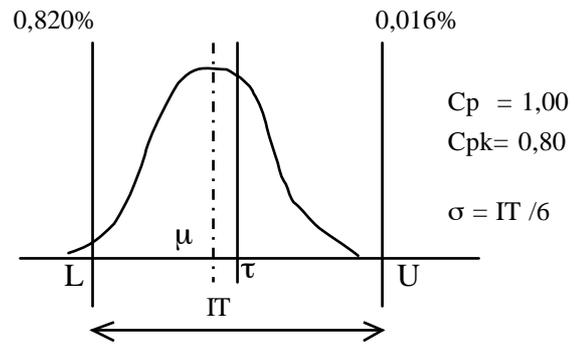
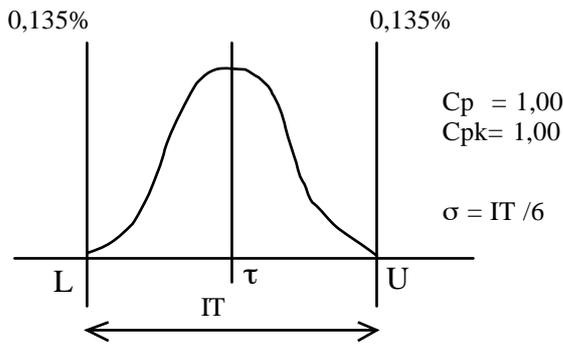
Prenons le cas d'une dimension fabriquée de $30,102$ pour une cote imposée à $30 \pm 0,1$. Il sera certainement nécessaire dans ce cas de corriger le réglage de la production, mais peut-on accepter cette pièce non conforme à $2\mu\text{m}$? La réponse à cette question nécessite de connaître la position de la moyenne statistique μ_{Y_k} par rapport à la moyenne centrée. En effet on montre que si toutes les cotes réalisées sont décentrées dans le même sens, non seulement les écarts-type de chaque cote doivent être diminués, mais avec un même taux de pièces non conformes acceptées, la probabilité d'avoir un assemblage final non conforme augmente avec le décentrage.

Dans un objectif de qualité sur le produit final, il est désormais acquis que la valeur cible d'une production doit être la dimension moyenne centrée sur l'intervalle de tolérance.

Ce principe est en contradiction avec une pratique courante en usinage qui consiste à réduire le nombre des interventions du régleur en utilisant une machine à faible dispersion σ_{Y_k} et en décalant volontairement la valeur cible « du bon coté » afin de tenir compte de l'évolution des dimensions obtenues sous l'effet de l'usure de l'outil.

6.4.3.1 Illustration de l'incidence des variations des indices de capabilité

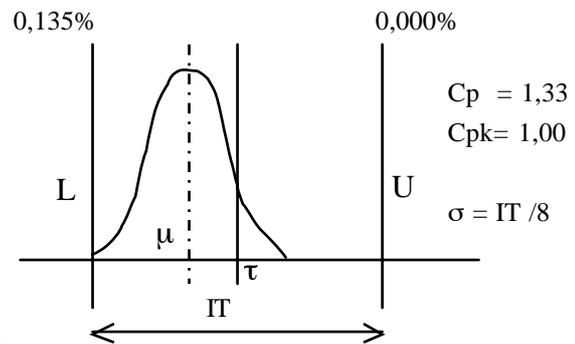
On se place dans le cas où l'intervalle de tolérance IT ($IT=U-L$) est constant (ou imposé), et on observe suivant la valeur des coefficients C_p et C_{pk} la position de la moyenne statistique et la valeur de l'écart-type σ de la distribution (loi normale)



$$C_p = \frac{U - L}{6\sigma}$$

$$C_{pk} = \sup \text{ de } \frac{\mu - L}{3\sigma} \text{ ou } \frac{L - \mu}{3\sigma}$$

Remarque : $C_{pk} \leq C_p$



Dans le cas d'une chaîne de cotes ($C_r = \sum C_i$), et d'une répartition des tolérances au pire des cas : l'IT sur la cote résultante est égale à la somme des IT des cotes de la chaîne, et la cote moyenne τ_r de la cote résultante est égale à la somme algébrique des cotes moyennes τ_i des cotes de la chaîne.

La moyenne statistique μ_r de la cote résultante Cfr réalisée, est la somme algébrique des moyennes μ_i des cotes Cfi réalisées. La moyenne statistique μ_r n'est pas centrée avec la cote moyenne τ_r de la cote résultante désirée.

L'écart-type σ_r de la cote résultante est $\sigma_r = \sqrt{\sum \sigma_i^2}$ ou les σ_i sont les écart-types de chacune des cotes Cfi réalisées, et qui sont statistiquement indépendantes.

Connaissant l'IT de la cote résultante et sa cote moyenne τ_r désirés, ainsi que la valeur de la cote moyenne μ_r et de l'écart-type σ_r réalisés, on en déduit les coefficients Cp et Cpk de la cote résultante.

6.4.4 Identification des écarts de réglage :

6.4.4.1 Cas unidimensionnel

Prenons le cas de 3 éléments de situation (points C1, C2 et C3) situés les un par rapport aux autres par les dimensions cibles L12 et L23, avec la condition que chacun des éléments de situation réalisés soit inclus dans 3 zones de tolérance $\Delta 1$, $\Delta 2$ et $\Delta 3$ de tailles différentes.

Une pièce étant réalisée, après mesure des surfaces 3 usinées on associe à chacune d'elle une surface idéale. Les positions relatives des éléments de situations (points R1, R2 et R3) sont données par les valeurs des dimensions réelles d12 et d23 (avec la propriété que la valeur de d13 = la valeur de d12 + la valeur de d23).

Ajustement des dimensions réalisées aux dimensions cibles :

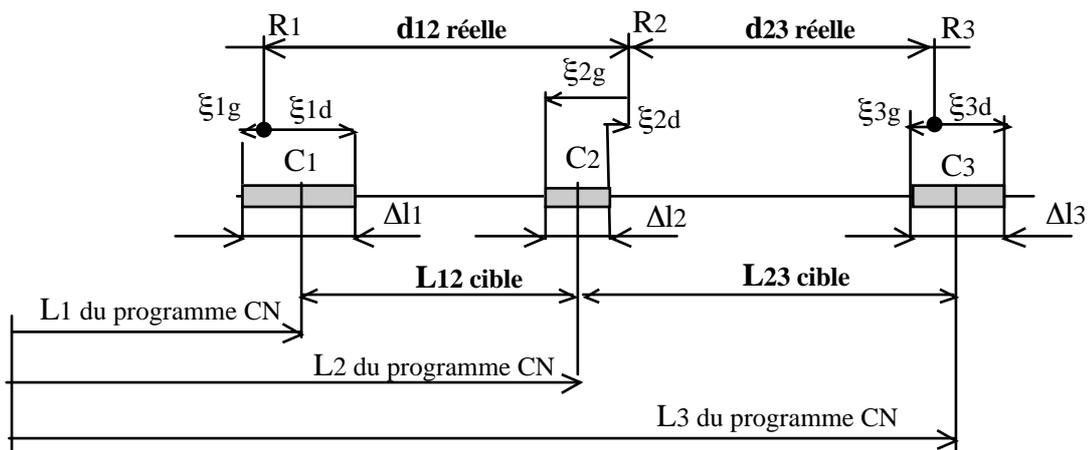
Il s'agit ici de comparer les valeurs réelles aux valeurs cibles, cette simple comparaison ne suffit pas pour conclure sur les réglages à effectuer sur les dimensions programmées dans la Commande numérique. En effet il existe de nombreuses solutions pour établir les écarts mesurés et par suite les corrections, par exemple il est possible de faire coïncider les points R2 et C2 et de corriger L1 de la quantité (d12 réelle - L12 cible) et L3 de la quantité (d23 réelle - L23 cible).

Il est également possible de chercher le petit déplacement u qui minimise la somme des carrés des écarts mesurés e_i entre les points cibles C_i et les points réels R_i.

$$\text{Ce qui donne } e_i = \xi_i - u \text{ avec } \xi_i = C_i R_i \text{ et } u = \sum \xi_i / 3$$

Nous proposons de prendre en compte non seulement les dimensions cibles mais également les frontières des zones de tolérance pour établir une mesure plus robuste du réglage.

Pour cela l'ajustement devra ce faire en minimisant l'écart maxi des écarts ξ_{ig} et ξ_{id} entre les points R1, R2 et R3 aux bornes des zones de tolérance, avec la convention que les écarts sont orientés positifs vers l'extérieur des zones.



Si on pose u la translation optimale du repère des points R_i et e_{maxi} l'écart maxi minimisé, le problème peut s'écrire sous la forme d'un ensemble de 6 inéquations :

$$\begin{aligned} e_{\max i} - (\xi_{1d} - u) &\geq 0 & e_{\max i} - (\xi_{2d} - u) &\geq 0 & e_{\max i} - (\xi_{3d} - u) &\geq 0 \\ e_{\max i} - (\xi_{1g} + u) &\geq 0 & e_{\max i} - (\xi_{2g} + u) &\geq 0 & e_{\max i} - (\xi_{3g} + u) &\geq 0 \end{aligned}$$

avec comme fonction objectif : e_{maxi} à minimiser

L'avantage de ce critère d'optimisation est de tenir compte des tailles variables des zones de tolérance et dans le cas où les tailles sont égales de se placer au plus près des cibles C_i

Écarts à corriger

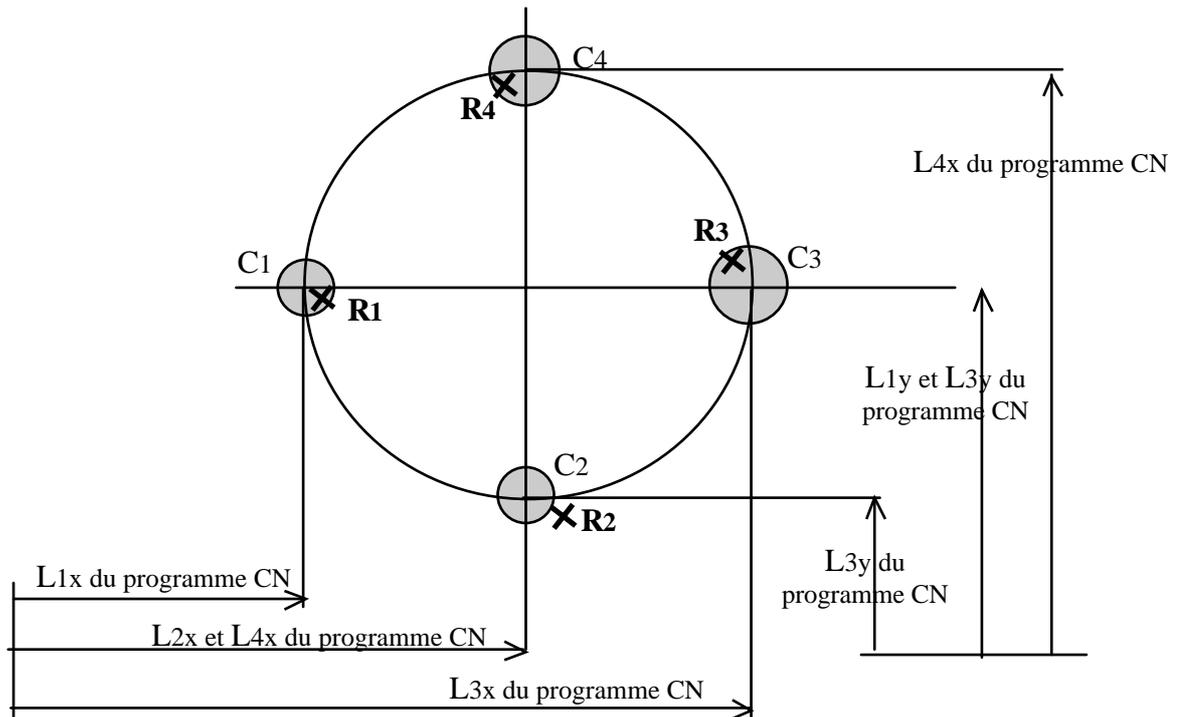
La position optimale des éléments réels étant déterminée par rapport aux cibles, les écarts de réglage e_i sont définis par les distances entre les points R_i et C_i.

Il est alors possible d'appliquer une stratégie statistique classique de correction (carte de contrôle).

6.4.4.2 Cas bidimensionnel

Le cas bidimensionnel correspond par exemple au cas d'une tolérance de localisation d'un ensemble d'alésages. Prenons le cas de 4 alésages (points C1, C2, C3 et C4) situés idéalement perpendiculaires à un plan, et placés à 90° sur un cercle de diamètre Ø idéal. Les 4 zones de tolérance circulaire sont de tailles différentes.

À chaque alésage réel est associé un cylindre d'axe perpendiculaire au plan de référence, cette association permet de définir les 4 point R1, R2, R3 et R4



À nouveau il est nécessaire de définir une stratégie d'ajustement du réel aux cibles.

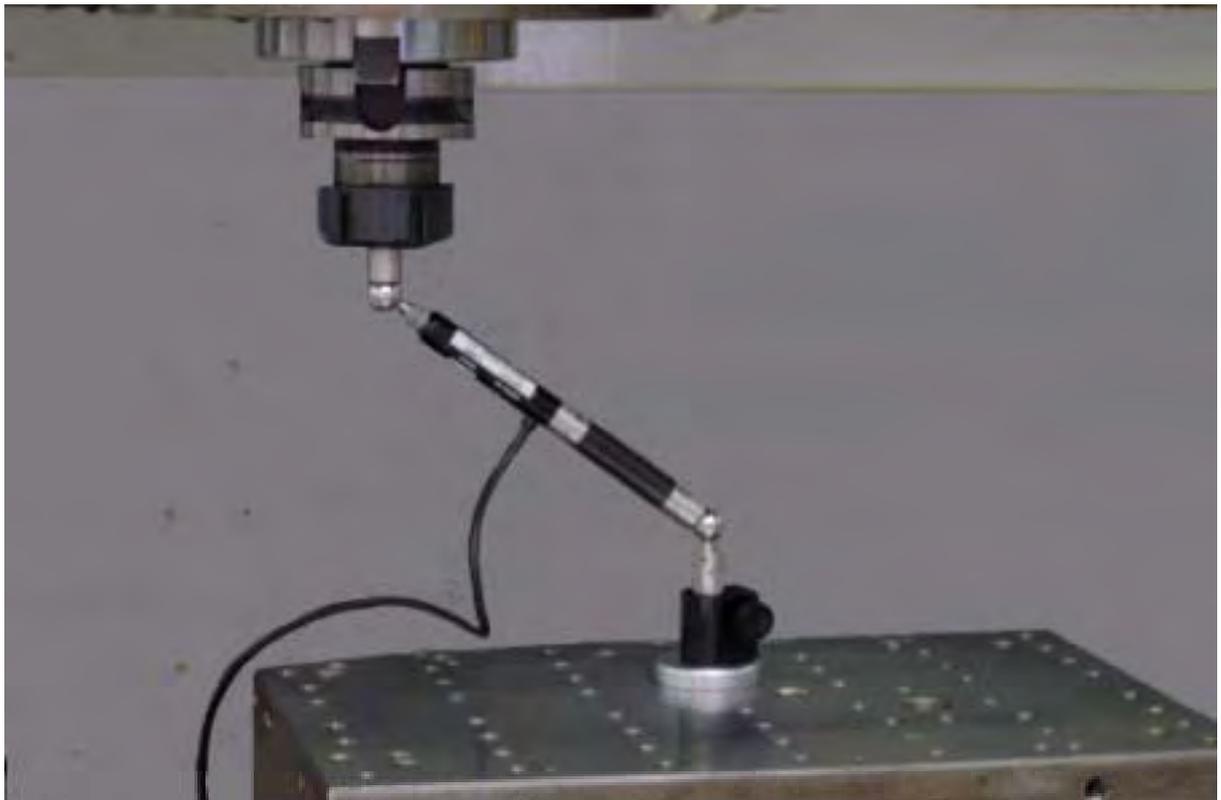
Comme précédemment il est possible de prendre un critère des moindres carrés sur les écarts $e_i = R_i C_i$. Pour cela on cherche le petit déplacement (2 translations u et v d'axes x et y et une rotation d'axe z) qui minimise la somme des carrés des écarts e_i .

$$\text{Avec } \sum e_i^2 = \sum e_{ix}^2 + \sum e_{iy}^2 \text{ ou } e_{ix} = \xi_{ix} - \vec{D}_I \cdot \vec{x} \text{ et } e_{iy} = \xi_{iy} - \vec{D}_I \cdot \vec{y}$$

L'ajustement peut ce faire également en minimisant l'écart maxi entre les points R_i et les frontières des zones de tolérance, avec la convention que les écarts sont orientés positifs vers l'extérieur des zones.

La position optimale des éléments réels étant déterminée par rapport aux cibles, les écarts de réglage e_i sont alors appliqués suivant une stratégie statistique classique de correction (carte de contrôle).

Partie 4 : Compensation des défauts géométriques des machines



Chap. 7 : Compensation numérique des défauts géométriques d'un mécanisme

=====

7.1 INTRODUCTION

Si on observe un mécanisme sous l'aspect de sa qualité géométrique, celui-ci est constitué d'un assemblage de corps (rigides ou non) dont les déplacements relatifs sont mesurés par des codeurs. L'objectif est de connaître, dans un repère R_o , la position d'un repère R_p lié à l'élément terminal du mécanisme.

La définition de la position idéale de R_p/R_o est obtenue par une transformation des coordonnées données par les codeurs en coordonnées cartésiennes dans R_o . La matrice de transformation des coordonnées est définie pour une cinématique et une géométrie idéales du mécanisme, elle est utilisée soit pour mesurer dans R_o la position idéale de R_p (cas des machines à mesurer), soit pour piloter dans R_o la trajectoire idéale de R_p (cas des machines à commande numérique).

Dans un mécanisme réel, les déplacements dans les liaisons et la géométrie réelle des pièces composant le mécanisme ont des défauts. Il est donc nécessaire d'évaluer, puis si possible, sous certaines hypothèses, de corriger numériquement l'écart entre la position réelle et la position idéale de R_p/R_o .

7.2 PRINCIPE D'ABBE

Le principe d'Abbe, énoncé en 1870 pour construire des appareils de mesure a mis en évidence l'effet « bras de levier » des défauts angulaires sur l'erreur de justesse d'un instrument de mesure dimensionnelle. Le principe d'Abbe s'énonce classiquement de la façon suivante :

« pour mesurer une longueur en bénéficiant de toute la précision de la règle de mesure, il faut placer la longueur dans le prolongement de la règle de mesure »

Ainsi si on compare l'exactitude d'un pied à coulisse (0,02 mm) et d'un palmer (0,002mm), bien que ces deux instruments de mesure soient fabriqués dans le même type d'atelier, le palmer qui mesure dans l'alignement de la règle de mesure respecte le principe d'Abbe et donne une incertitude sur la mesure 10 fois plus faible que dans le cas du pied à coulisse qui ne respecte pas le principe d'Abbe.

Cette même constatation peut être faite sur une machine à mesurer ou l'erreur de mesure d'une cale-étalon, placée parallèlement à l'un des axes de la MMT, va croître proportionnellement avec l'éloignement de la cale de la règle de mesure concernée.

7.3 MODELISATION DES « 21 DEFAUTS » D'UNE MMT

Une machine à mesurer tridimensionnelle est constituée d'un marbre (S_0), et de trois chariots (S_1), (S_2) et (S_3) formant une boucle ouverte de quatre solides liés entre eux par trois liaisons prismatiques. (Figure 1)

Les déplacements X_L , Y_L , Z_L de chacun des trois chariots sont mesurés par des règles optoélectroniques placées au niveau des liaisons prismatiques. Les origines de chacune des trois règles sont notées respectivement O_{10} , O_{20} et O_3 . À chaque solide est attaché un repère (Figure 1). Les coordonnées du point P du palpeur placé à l'extrémité du chariot (S_3) s'écrit sous la forme vectorielle :

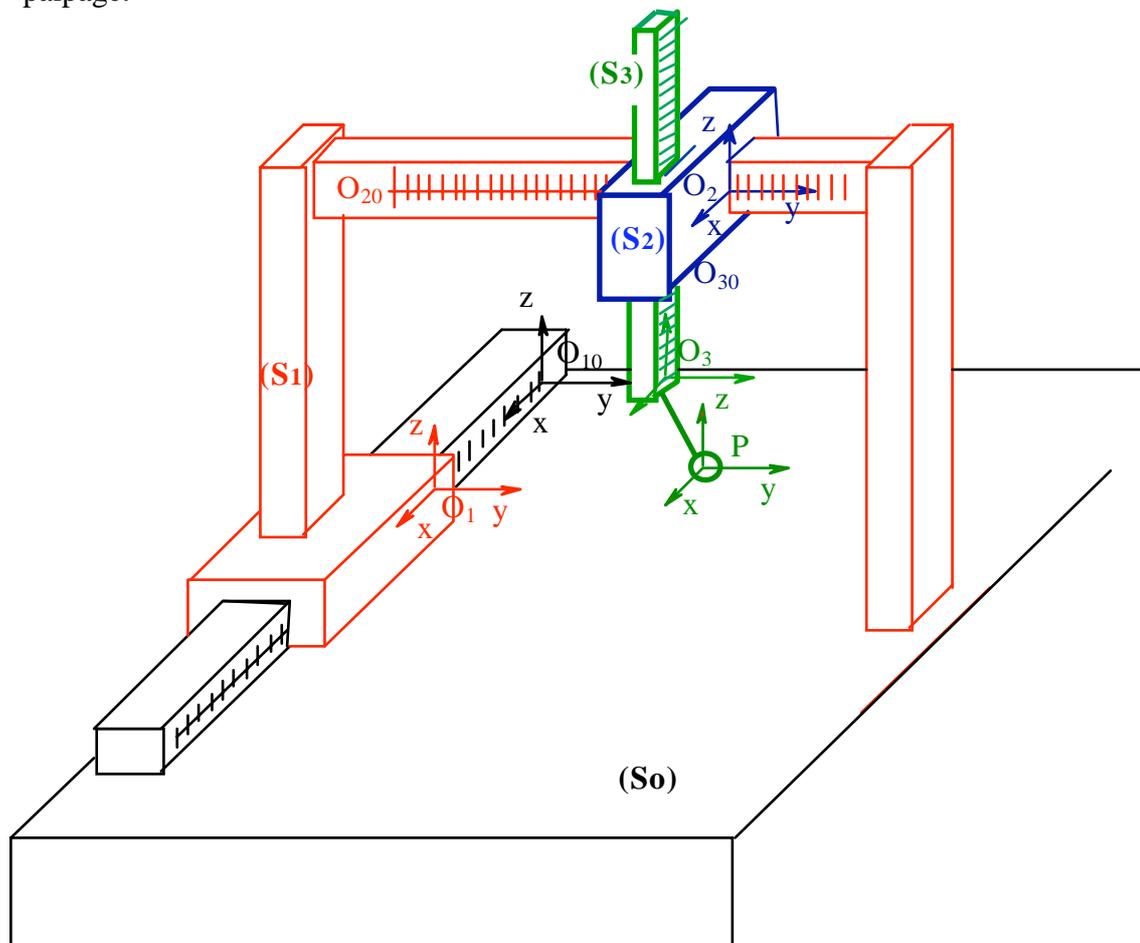
$$\vec{O}_{10}P = \vec{O}_{10}O_1 + \vec{O}_1O_{20} + \vec{O}_{20}O_2 + \vec{O}_2O_{30} + \vec{O}_{30}O_3 + \vec{O}_3P$$

avec :

$\vec{O}_{10}O_1 = X_L\vec{x}$, $\vec{O}_{20}O_2 = Y_L\vec{y}$, $\vec{O}_{30}O_3 = -Z_L\vec{z}$ les vecteurs dont les grandeurs sont définies par les valeurs des déplacements lues par les règles optoélectroniques.

et $\vec{O}_1O_{20} = a_1\vec{x} + b_1\vec{y} + c_1\vec{z}$ et $\vec{O}_2O_{30} = a_2\vec{x} + b_2\vec{y} + c_2\vec{z}$ des vecteurs constants définis par construction de la machine.

Enfin $\vec{O}_3P = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$ définissant la position du point P mesuré par le système de palpé.



7.3.1 Modélisation des défauts d'une liaison prismatique.

Les défauts d'une liaison prismatique peuvent être caractérisés en chaque point de sa trajectoire, par un torseur de petits déplacements modélisant deux écarts de rectitude et trois écarts angulaires appelés classiquement lacet, roulis et tangage. La sixième composante du torseur correspond au défaut de justesse de la règle optoélectronique mesurant le déplacement du solide.

Ainsi les écarts de la liaison prismatique entre les solides S1 et S0 peut s'écrire au point O1 sous la forme du torseur :

$$\left[T_{S_1/S_0} \right]_{O_1} = \begin{pmatrix} \alpha_I(X_L) & j_x(X_L) \\ \beta_I(X_L) & v_I(X_L) \\ \gamma_I(X_L) & w_I(X_L) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{ou } \alpha_I \text{ est le tangage, } \beta_I \text{ le roulis, } \gamma_I \text{ le lacet} \\ u \text{ et } v \text{ les défauts de rectitude} \\ \text{et } j_x \text{ l'écart de justesse de la règle de mesure} \end{array}$$

On fait ici l'hypothèse que les solides sont indéformables, que la température et l'hygrométrie sont constantes, que les liaisons sont sans jeux et que les écarts sur chacune des liaisons sont répétitifs et indépendants les uns des autres.

De la même façon, les défauts des deux liaisons prismatiques suivant les axes de déplacement y et z de la machine peuvent être caractérisés pour toute valeur des déplacements Y_L et Z_L par les deux torseurs de petits déplacements exprimés respectivement aux points O_2 et O_3 :

$$\left[T_{S_2/S_1} \right]_{O_2} = \begin{bmatrix} \alpha_2(Y_L) & u_2(Y_L) \\ \beta_2(Y_L) & j_2(Y_L) \\ \gamma_2(Y_L) & w_2(Y_L) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \left[T_{S_3/S_2} \right]_{O_3} = \begin{bmatrix} \alpha_3(Z_L) & u_3(Z_L) \\ \beta_3(Z_L) & v_3(Z_L) \\ \gamma_3(Z_L) & j_3(Z_L) \end{bmatrix}$$

7.3.2 Expression des écarts de position du point P dans R_0

En faisant l'hypothèse que les axes des trois glissières sont orthogonaux, l'écart de la position du point P dans le repère R_0 de la MMT est caractérisé par le torseur de petit déplacement du solide S_3 par rapport au solide S_0 exprimé au point P.

Du fait de l'hypothèse des petits déplacements, on peut écrire la relation :

$$\left[T_{S_3/S_0} \right]_P = \left[T_{S_3/S_2} \right]_P + \left[T_{S_2/S_1} \right]_P + \left[T_{S_1/S_0} \right]_P$$

et par suite on obtient le petit déplacement du point P :

$$\overrightarrow{D}_P = (\overrightarrow{D}_{O_3(S_3/S_2)} + \overrightarrow{PO_3} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{S_3/S_2}) + (\overrightarrow{D}_{O_2(S_2/S_1)} + \overrightarrow{PO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{S_2/S_1}) + (\overrightarrow{D}_{O_1(S_1/S_0)} + \overrightarrow{PO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{S_1/S_0})$$

L'écart de position du point P résulte de 6 écarts par axe de la MMT (3 écarts angulaires, 2 écarts de rectitude et un écart de justesse)

L'écart de justesse pour un axe est proportionnel à la longueur du déplacement sur la règle de mesure. Ainsi on aura : $j_1(X_L) = k_{j1} \times X_L$, $j_2(Y_L) = k_{j2} \times Y_L$ et $j_3(Z_L) = k_{j3} \times Z_L$, avec k_{j1} , k_{j2} et k_{j3} les constantes d'allongement des trois règles de mesure.

$$\overrightarrow{D}_P \begin{cases} \varepsilon_x^* = u_2(Y_L) + u_3(Z_L) + k_{j1} X_L - b \gamma_3(Z_L) + c \beta_3(Z_L) - (b - b_2)\gamma_2(Y_L) \\ \quad + (c - c_2 + Z_L)\beta_2(Y_L) + (b - b_2 - Y_L + b_1)\gamma_1(X_L) + (c - c_2 - Z_L + c_1)\beta_1(X_L) \\ \varepsilon_y^* = v_1(X_L) + v_3(Z_L) + k_{j2} Y_L - c \alpha_3(Y_L) + a \gamma_3(Z_L) - (c - c_2 + Z_L)\alpha_2(Y_L) \\ \quad + (a - a_2)\gamma_2(Y_L) - (c - c_2 - Z_L + c_1)\alpha_1(X_L) + (a - a_2 + a_1)\gamma_1(X_L) \\ \varepsilon_z^* = w_1(X_L) + w_2(Y_L) + k_{j3} Z_L - a \beta_3(Z_L) + b \alpha_3(Z_L) + (a - a_2)\beta_2(Y_L) \\ \quad + (b - b_2)\alpha_2(Y_L) - (a - a_2 + a_1)\beta_1(X_L) + (b - b_2 - Y_L + b_1)\alpha_1(X_L) \end{cases}$$

Dans la pratique les directions des trois translation choisies pour définir les écarts de rectitudes des liaisons ne sont pas orthogonales, il est alors nécessaire de prendre en compte les 3 défauts angulaires α_{xy} , α_{yz} et α_{zx} entre les trois axes

On obtient alors l'expression des écarts de compensation du point P en fonction des 21 défauts.

$$\overrightarrow{D}_P \begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_x^* + \alpha_{xy} Y_L + \alpha_{xz} Z_L \\ \varepsilon_y = \varepsilon_y^* + \alpha_{yz} Z_L + \alpha_{yx} X_L \\ \varepsilon_z = \varepsilon_z^* + \alpha_{zx} X_L + \alpha_{zy} Y_L \end{cases}$$

7.3.3 Méthode Identification des défauts

Le volume de la machine est divisé en volumes élémentaires définis par un pas de mesure des 15 écarts dus au défaut des trois liaisons prismatiques de la MMT. Pour chaque volume élémentaire, on suit la procédure suivante :

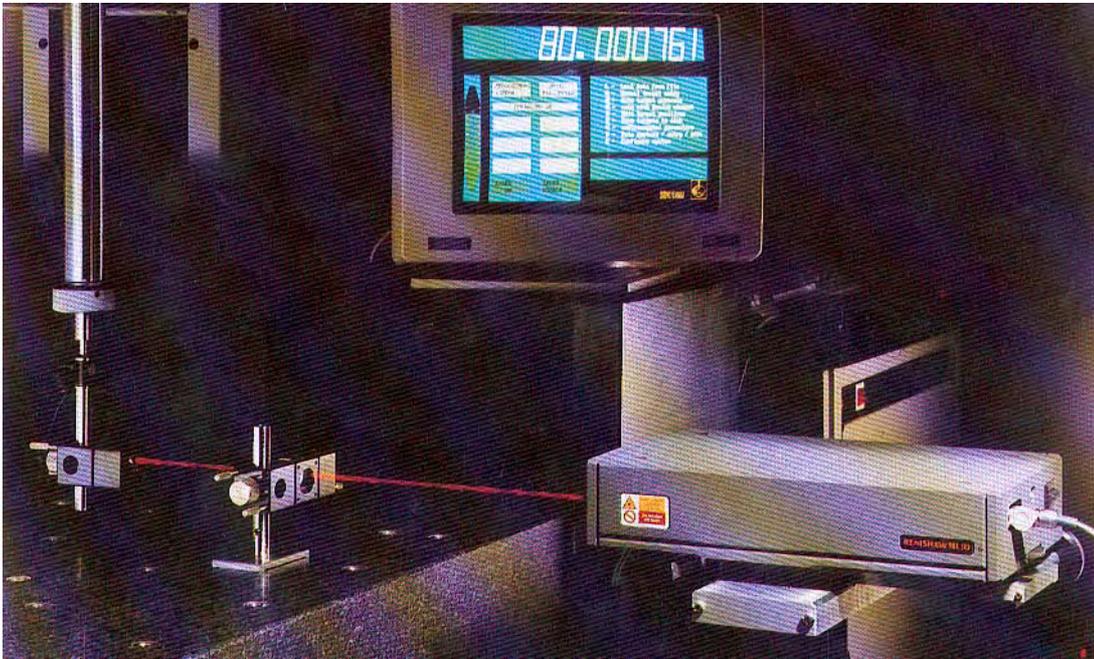
Première étape : identification axe par axe des 9 écarts angulaires,

Deuxième étape : les 9 écarts angulaires étant compensés (effet d'Abbe annulé) on identifie axes après axe les 6 écarts de rectitudes

Troisième étape : les 9 écarts angulaires et les 6 écarts de rectitudes étant compensés (défauts des liaisons prismatiques annulés) on identifie les 3 écarts de justesse

Quatrième et dernière étape : les 18 écarts précédents étant compensés, on identifie les 3 défauts de perpendicularité entre les directions générales des axes des trois liaisons prismatiques.

Les mesures sont réalisées à l'aide de niveaux électroniques (pour les angles), d'un laser à interférométrie (pour les angles, les rectitudes et les justesses), d'une règle de référence en marbre avec comparateur(s) (pour les rectitudes et les angles), d'une référence de longueur fixe mesurée à 45° par rapport aux axes (pour les défauts de perpendicularité entre les axes)



7.4 METHODE DE SURVEILLANCE DE LA QUALITE GEOMETRIQUE D'UNE MACHINE A COORDONNEES.

Le principe retenu est de mettre en évidence l'effet d'Abbe, les défauts de rectitude, les défauts de justesse relatifs entre les axes et les défauts d'orthogonalités par une procédure simple qui consiste à mesurer une distance entre deux points d'un artefact placé judicieusement dans le volume de travail de la machine.

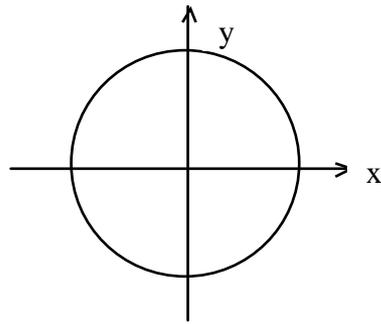
7.4.1 Cas des machines à mesurer.

Il existe de nombreux types d'artefact. On peut citer les principaux : plusieurs cales-étalons montées sur un support orientable, un disque parfaitement circulaire, une plaque percée de trous suivant un quadrillage régulier dans lesquels sont fixées des billes, deux billes fixées sur une barre et un système de fixation de la barre orientable.

Si la machine à mesurer était sans défaut, la mesure de la distance d entre deux points d'un artefact devrait être constante quelle que soit sa position dans le volume de travail de la MMT.

Si on place par exemple l'artefact dans un plan parallèle aux directions des axes x, y de la MMT, et que l'on mesure la distance d de l'artefact en faisant varier son orientation, toutes les mesures devraient donner le même résultat.

En rapportant toutes les mesures sur un graphe en coordonnées polaires on obtient un cercle de rayon d .



La forme du cercle varie en fonction des défauts de la machine à mesurer, par exemple le cercle devient une ellipse de grand axe x , si les écarts de justesse de la règle x sont négatifs.

Le tableau ci-dessous regroupe les principaux défauts identifiés par la déformation du cercle.

| | |
|---|---------------------|
| | |
| <p>Grand axe de l'ellipse suivant l'un des axes x ou y : Rapport des Justesses entre les axes x et y différent de 1</p> | |
| <p><u>Cas 1</u></p> | <p><u>Cas 2</u></p> |
| <p>Grand axe de l'ellipse à $\pm 45^\circ$: Défaut d'orthogonalité entre les axes x et y (cas 1 : angle $>90^\circ$; cas 2 : angle $<90^\circ$)</p> | |
| | |
| <p>Trilobe : Défauts de rectitude sur l'axe x</p> | |

Exemples de matériel de mesure

Cale-étalon de 500 mm montée sur un support orientable

La longueur de la cale est mesurée :
- parallèle aux axes de la MMT (défaut de justesse)
- parallèle aux axes de la MMT à des distances variables de la règle de la MMT (écarts angulaires du guidage)
- à 45° des axes de la MMT (défaut d'orthogonalité des axes de la MMT)



Distance entre deux points de contact entre la sphère du palpeur et deux sphères.

Un bras muni d'une sphère à une extrémité est posé à l'autre extrémité, par une liaison sphérique, sur une sphère fixe sur la table de la MMT.

La sphère fixe sur la table de la MMT est dans un premier temps mesurée avec le palpeur, puis le bras est placé d'un côté sur la sphère fixe, et de l'autre côté maintenu en équilibre par une fourchette coulissant sur la tige du palpeur.



Par commande numérique, on vient ensuite mesurer dans toutes les directions la distance entre le centre de la sphère fixe et le contact entre le palpeur et la sphère du bras.



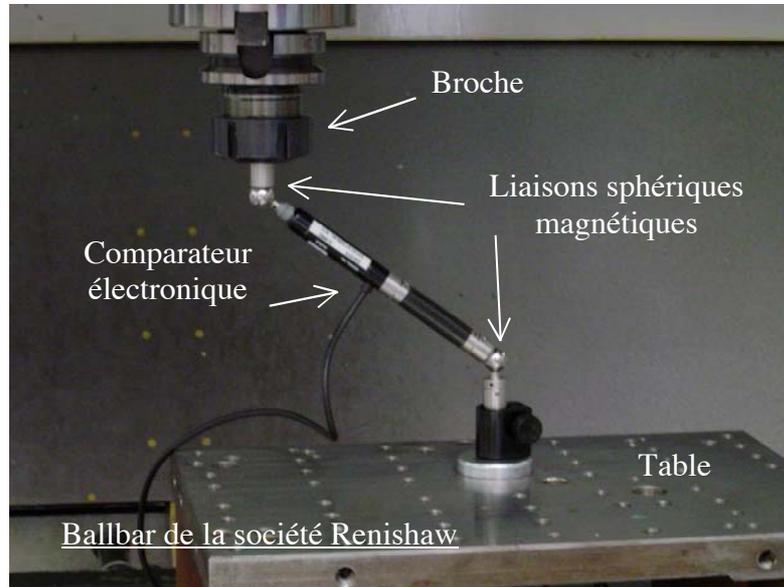
Vue sur l'extrémité du bras maintenu en équilibre par l'intermédiaire d'une fourchette à deux doigts



Sphère fixe permettant de réaliser une liaison sphérique avec le bras

74.1 Cas des machines-outils à commande numérique.

Dans le cas des MOCN, le principe reste le même c'est-à-dire que l'on vient mesurer, à l'aide d'un comparateur électronique, la variation d'une longueur, lorsque le mouvement relatif entre la tête de la MOCN et la table est programmé pour décrire des trajectoires circulaires sur une portion de sphère.

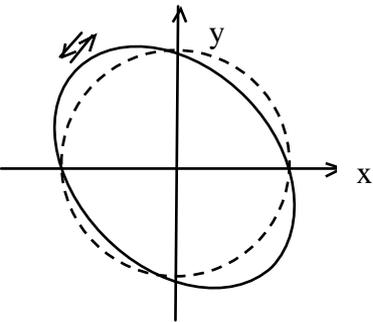
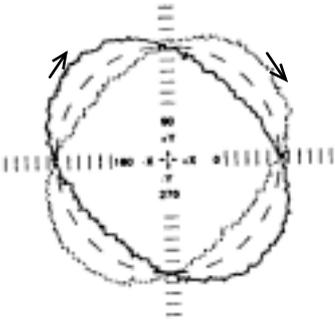
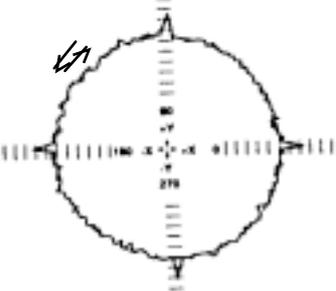
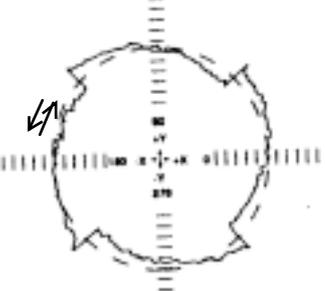
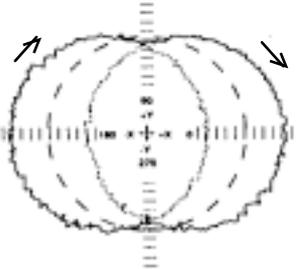
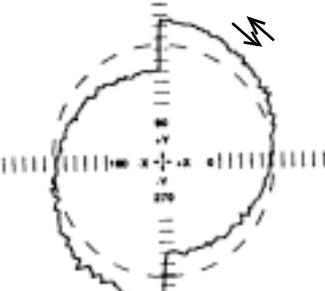
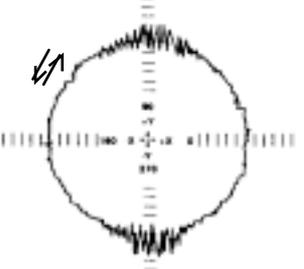


En reportant à nouveau, en coordonnée polaire, la variation de la longueur indiquée par le comparateur électronique, les écarts mesurés seront représentatifs aussi bien des défauts géométriques de la Machine Outil (21 défauts) que des défauts liés au comportement de la commande des axes.

Afin de séparer les deux types de défaut, les trajectoires circulaires sont parcourues dans les deux sens (horaire et anti-horaire), et les deux relevés des écarts mesurés sont superposés sur le même graphe.

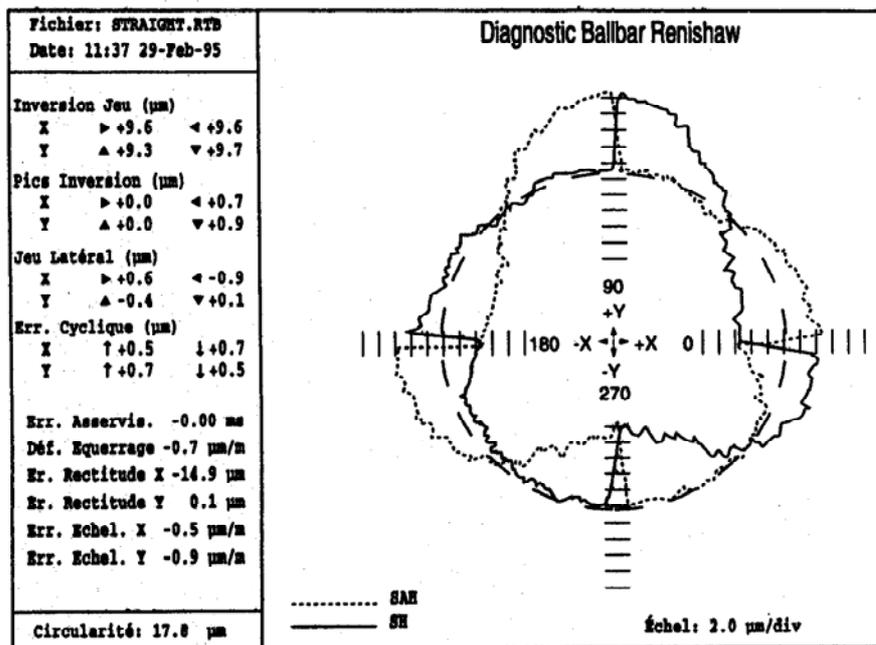
Le tableau ci-dessous dresse les principales observations faites si un seul des défauts était prépondérant.

| | |
|---|---|
| | |
| Ellipse d'axe x : <i>Défaut de justesse</i> | Trilobe : <i>défauts de rectitude sur l'axe x</i> |

| | |
|---|--|
|  |  |
| <p>Ellipse d'axe à 45° : Défaut d'orthogonalité entre les axes x et y</p> | <p>Deux ellipses d'axes à $\pm 45^\circ$: Différence entre les gains des asservissements des deux axes.</p> |
|  |  |
| <p>Pics d'inversion : retard à l'inversion de sens de déplacement de l'axe</p> | <p>Dans l'interpolateur circulaire, l'un des axes est maître de l'autre axe.</p> |
|  |  |
| <p>Jeu latéral dans la glissière</p> | <p>Inversion de jeu : inversion des efforts sur la vis à billes y</p> |
|  |  |
| <p>Glissement intermittent à l'inversion de sens de déplacement</p> | <p>Vibration de la machine</p> |

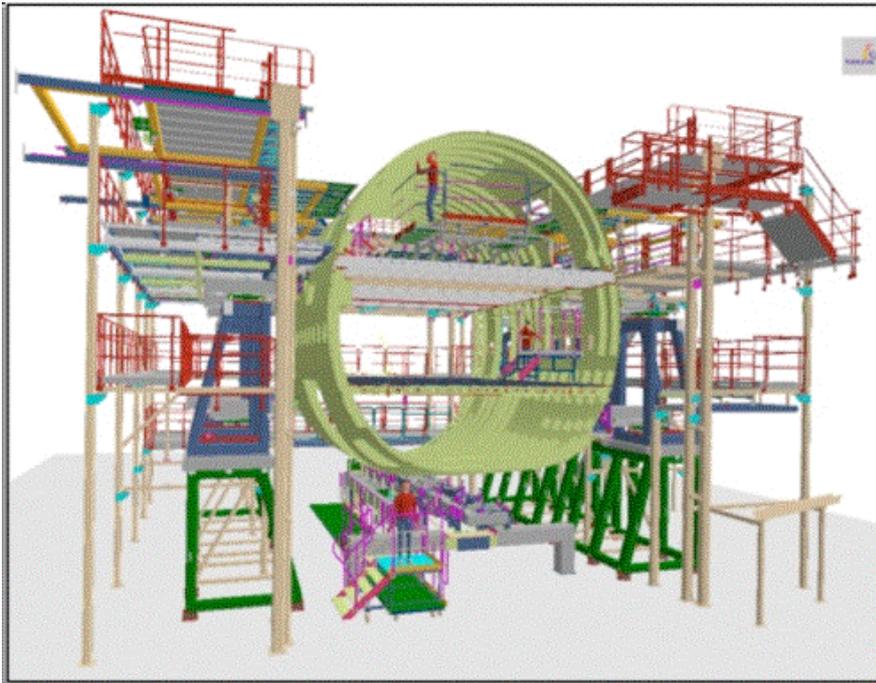
Dans la pratique les défauts potentiels de la MOCN sont cumulés et un logiciel de diagnostic permet d'identifier les différentes erreurs.

La figure ci-dessous donne un exemple de diagnostic du logiciel de la ballbar de la société Renishaw.



* *
 *

Partie 5 : Chaînes de cotes 3D



Partie 5 : Chaînes de cotes tridimensionnelles

=====

8.1 ETABLISSEMENT DES RELATIONS DE COMPORTEMENT D'UN MECANISME

Dans un assemblage de pièces rigides, les défauts géométriques des pièces réelles doivent être compensés par des jeux tolérés dans les différentes liaisons du mécanisme. Pour garantir un bon fonctionnement du mécanisme il est donc nécessaire d'établir les relations géométriques nécessaires et suffisantes de compatibilité entre les défauts des pièces et les jeux.

Pour cela on se propose de modéliser les défauts des pièces et les jeux dans les liaisons par des torseurs de petits déplacements et de montrer comment établir les relations de comportement tridimensionnel d'un mécanisme.

On considère dans un premier temps que les pièces du mécanisme sont sans défaut. Chaque pièce est liée aux pièces voisines par plusieurs liaisons avec jeu.

Le jeu dans chacune des liaisons entre la surface S_i d'une pièce A et la surface S_j d'une pièce B est modélisé par un torseur de petit déplacement appelé *torseur jeu* noté $T(A_{S_i}/B_{S_j})$. Les six composantes d'un torseur jeu caractérisent dans un repère local à la liaison, à la fois les petits déplacements (noté J) autorisés par le jeu entre les surfaces S_i et S_j en vis-à-vis ainsi que les déplacements indéterminés par la liaison (noté *Ind*). Le repère local de la liaison est défini par les éléments de situation des surfaces en vis-à-vis. Les déplacements indéterminés de la liaison correspondent aux mobilités cinématiques de la liaison.

Prenons par exemple le cas d'une liaison réalisée par deux surfaces cylindriques en vis-à-vis (Figure 1). Le repère local de la liaison est défini par l'axe d'un cylindre, l'origine est un point courant de l'axe, les mobilités cinématiques de la liaison sont une rotation et une translation suivant l'axe du cylindre qui correspondent aux deux déplacements indéterminés Ind_α et Ind_u par la liaison, les quatre autres composantes du torseur jeu J_β , J_γ , J_v et J_w correspondent aux petits déplacements autorisés par le jeu dans la liaison.

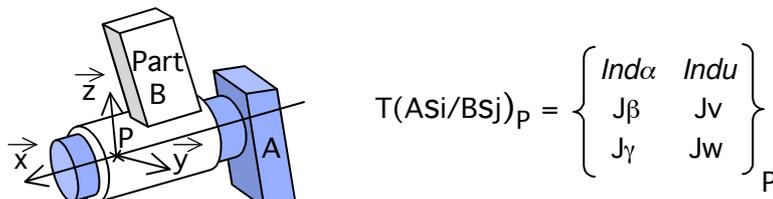


Figure 1: Torseur jeu entre la surface S_i de la pièce A et la surface S_j de la pièce B

S'il existe en théorie 2^6 forme de torseurs jeux différents, du fait des symétries et des impossibilités de réalisation physique avec deux pièces, un nombre fini de torseurs jeux des liaisons cinématiques des mécanismes sont répertoriés (encastrement, pivot, glissière, pivot glissant, rotule à doigt, rotule, appui plan, linéaire rectiligne, linéaire annulaire, ponctuel).

Les déplacements relatifs des pièces, autorisés par les jeux dans les liaisons, sont limités par la mise en contact des surfaces réelles. Il est donc nécessaire de prendre en compte les défauts géométriques des pièces. Pour cela les surfaces réelles sont modélisées par des surfaces idéales tangentes du côté libre de la matière appelé élément de substitution. Chaque surface réelle est modélisée par un torseur de petit déplacement appelé *torseur d'écart* noté $E(AS_i/A)$ qui représente dans un repère local les écarts de position et d'orientation de l'élément de substitution noté AS_i par rapport à la géométrie nominale idéale de la pièce noté A . Les six composantes du torseur d'écart sont établies à partir des degrés d'invariance de la classe de surface (§6.1.3). Les composantes du torseur correspondant aux degrés d'invariance de la surface sont notées Or_x, Or_y, Or_z pour les rotations et Otx, Oty, Otz pour les translations, les composantes du torseur correspondant aux écarts sont notées β, γ pour les écarts en rotation et u, v, w pour les écarts en translation.

Prenons par exemple le cas d'une surface plane, le repère local est défini par la normale au plan (axe z), les déplacements laissant invariante la surface sont une rotation d'axe z (noté Or_z) et deux translations suivant les axes x et y (notée Otx et Oty). Les écarts du torseur d'écart caractérisant le défaut de la surface plane seront définis par les petits déplacements ne laissant pas invariante la surface, c'est-à-dire les deux petites rotations d'axe x et y (notées α et β) et la petite translation d'axe z (notée w) qui permettent de passer du repère de la surface nominale à celui de la surface réelle.

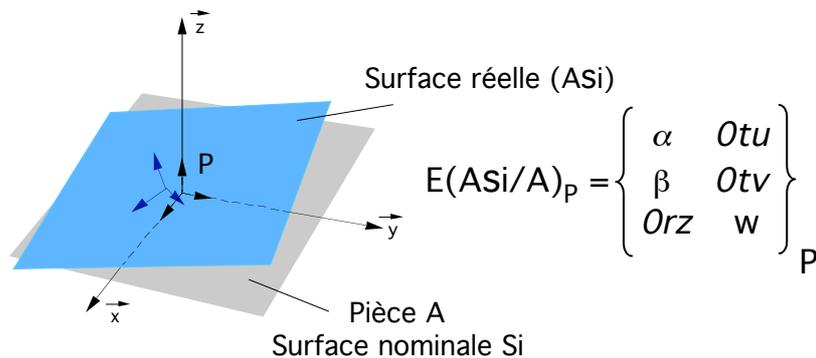
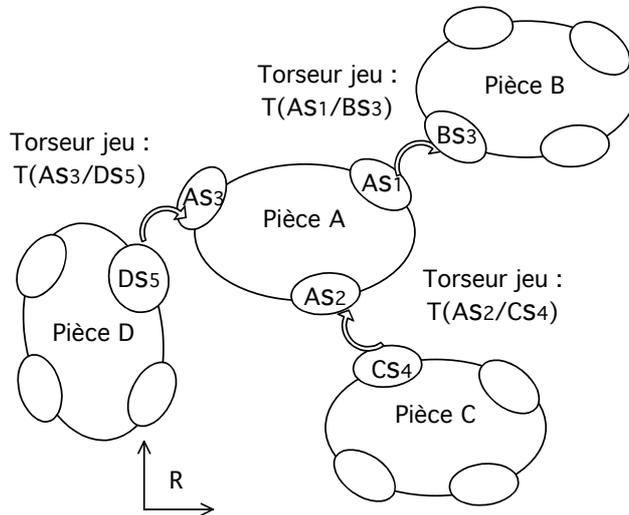


Figure 2: Torseur d'écart entre la surface nominale et la surface réelle de la pièce A

Il existe sept classes de surfaces (§6.1.3) et par suite sept types de torseur d'écart. Chaque pièce réelle sera donc définie par une géométrie nominale idéale et par les seules composantes d'écarts des torseurs d'écart des surfaces, les composantes qui correspondent aux degrés d'invariance des surfaces sont dans cette application choisies arbitrairement égales à zéro.

8.2 LOIS DE COMPORTEMENT FORMELLES D'UN MECANISME COMPOSE DE PIECES RIGIDES :

L'objectif est d'établir toutes les relations formelles entre les jeux des différentes liaisons (*torseurs jeu*) d'un mécanisme et les défauts géométriques des surfaces (*torseurs d'écart*).



Pour cela le mécanisme est défini dans un repère fixe noté R, repère dans lequel sont définies les surfaces nominales idéales de l'ensemble des pièces (A, B...) assemblées. Les pièces réelles sont définies par les toseurs d'écart des différentes surfaces par rapport aux surfaces nominales.

Supposons que seule la pièce réelle A soit mobile et que toutes les autres pièces réelles

du mécanisme soient en position fixe dans R. Le petit déplacement de la pièce A exprimé dans le repère local d'une des surfaces de liaison avec la pièce voisine B est le toseur jeu de la liaison $T(As_i/BS_j)$. Chaque toseur jeu de chacune des liaisons de la pièce A avec ses pièces voisines exprime en des points et dans des repères différents, le même déplacement de la pièce A.

La compatibilité des toseurs jeux pour exprimer le même déplacement de la pièce A revient à écrire l'égalité des toseurs jeux $T(As_1/BS_3) = T(As_2/CS_4) = T(As_3/DS_5)$ et à chercher les relations qui lient les composantes des toseurs en éliminant des équations les composantes indéterminées des toseurs jeux.

Dans le cas d'un mécanisme, toutes les pièces réelles sont mobiles au moins en petits déplacements, chaque toseur jeu exprime dans ce cas le déplacement relatif des deux pièces de la liaison. Ce qui dans le repère fixe R s'écrit (Figure 3) :

$$T(As_i/BS_j) = E(As_i/A) + D(A/R) - D(B/R) - E(BS_j/B)$$

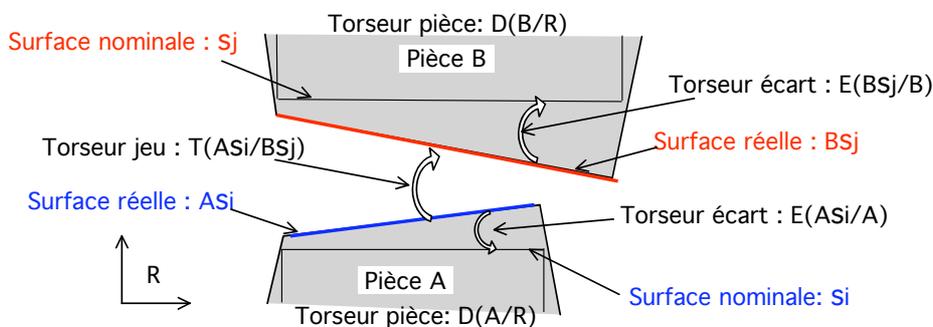


Figure 3: Relations entre les différents toseurs d'une liaison

Pour chaque liaison du mécanisme, on établit une relation :

$$T(\text{Asi}/\text{Bs}_j) = E(\text{Asi}/\text{A}) + D(\text{A}/\text{R}) - D(\text{B}/\text{R}) - E(\text{Bs}_j/\text{B})$$

On obtient ainsi un système d'équations où les inconnues sont les variables indéterminées des torseurs jeux de chaque liaison. La résolution en écriture symbolique du système d'équations par la méthode du pivot de Gauss partiel permet d'exprimer :

- les valeurs des indéterminées en fonction des écarts des torseurs jeux et des torseurs d'écart.
- les degrés de liberté du mécanisme par les indéterminés non déterminés par la résolution
- lorsque le système d'équations est sur contraint, les équations de compatibilité entre les jeux des différentes liaisons du mécanisme et les défauts géométriques des surfaces qui correspondent aux chaînes 3D du mécanisme

8.3 EXEMPLE SUR UN CAS SIMPLE : MISE EN POSITION D'UN ARBRE PAR UN VÉ ¹

La mise en position d'un arbre par un vé, représenté sur la figure 4, est un élément de montage d'usinage couramment utilisé. On constate néanmoins qu'il n'est pas très facile à intégrer dans une chaîne de cotes traditionnelle puisqu'il faut recourir à un calcul géométrique supplémentaire qui de plus ne tient pas compte des défauts du vé.

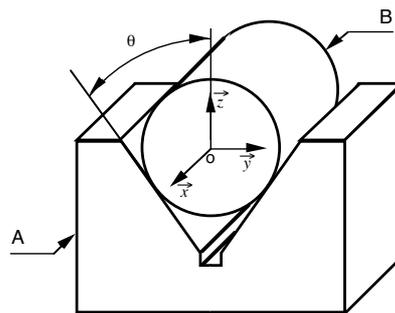


Figure 4 : montage d'un arbre sur un vé d'angle 2θ

Le cas classique : le vé est parfait

Un calcul géométrique simple permet, dans le cas où les défauts du vé sont négligés par rapport à la variation de rayon de l'arbre, d'exprimer la variation Δz de position de l'axe du cylindre suivant l'axe vertical de la figure 4. Ce résultat est rappelé par la formule 1. Le décalage suivant l'axe horizontal est nul, c'est-à-dire indépendant du rayon, dans ce cadre d'hypothèses.

$$\Delta z = \frac{\Delta R}{\sin(\theta)} \quad (1)$$

Un cas plus réaliste : le vé et l'arbre sont imparfaits

Les vés de mise en position, même s'ils sont souvent plus précis que les pièces, n'en recèlent pas moins des défauts. Dès lors, il devient intéressant de connaître l'impact de ces défauts sur la mise en position, ce qui demande un modèle qui les inclus. La résolution de ce problème avec la prise en compte de l'ensemble des défauts de

¹ Extrait de l'article "Présentation, à partir d'un exemple, du calcul des chaînes de cotes 3D" Revue Technologies et Formations, n°68, Paris, 1996/5, pages 23-27, E. Ballot, P. Bourdet

position et d'orientation du cylindre, si elle semble possible, n'est pratiquement pas mise en oeuvre car le calcul est plus complexe. Nous traitons donc ce problème pour illustrer la mise en équation de chaînes de cotes tridimensionnelles.

Mise en équation du problème

La méthode de calcul comporte trois grandes étapes et s'appuie sur un formalisme suffisamment général pour traiter des problèmes de chaînes de cotes aussi bien dans le cas de la conception que de la fabrication. Ces trois étapes sont :

Définir formellement les paramètres des éléments du mécanisme ou du montage. Il s'agit essentiellement :

- d'associer des torseurs d'écarts à chaque surface des pièces,
- de caractériser le déplacement de chaque pièce par un torseur de petits déplacements et
- de calculer la forme des torseurs jeux associés à chaque liaison.

Calculer des petits déplacements de chaque pièce en fonction des écarts et des jeux. Le cas échéant, une combinatoire de mise en position peut intervenir et engendre autant de positions qu'il existe de cas retenus pour l'analyse.

Calculer des contraintes géométriques sur les pièces en fonction des conditions fonctionnelles imposées.

Dans les parties suivantes, nous développerons, sur l'exemple proposé, les trois étapes présentées.

Description du montage et des paramètres

Paramétrage des défauts de l'arbre : torseur d'écart de l'arbre

Le torseur d'écart exprime l'écart entre la surface nominale et une surface de même nature qui modélise la surface réelle. Ce torseur d'écart est lui-même construit à partir de deux torseurs de petit déplacement. Le torseur de petits déplacements de la surface et le torseur de variation des caractéristiques intrinsèques.

Le modèle tel qu'il a été développé conserve la typologie de la surface dès lors un cylindre est localisé en orientation et en position par quatre paramètres auxquels on ajoute un paramètre de variation du diamètre, figure 5.

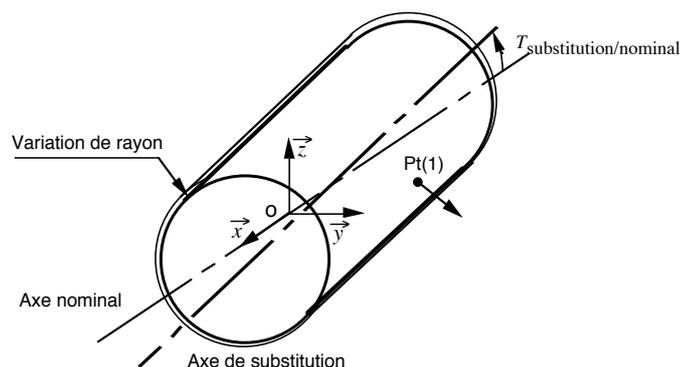


Figure 5 : paramétrages des écarts d'un cylindre

On écrit alors la relation (2) du torseur d'écart du cylindre de substitution par rapport au cylindre nominal, pour un point particulier de celui-ci, par la composition de deux torseurs dont un décrit le déplacement de l'axe et l'autre la variation de rayon en un point de paramètre j.

$$T_{axe} = \begin{Bmatrix} i_{3/B}(rx) & i_{3/B}(tx) \\ \beta_{3/B} & v_{3/B} \\ \gamma_{3/B} & w_{3/B} \end{Bmatrix}_O ; T_{rayon} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \cos \varphi \\ 0 & R \sin \varphi \end{Bmatrix}_{P_1(1)} \quad (2)$$

$$T_{3/B} = T_{axe} + T_{rayon} = \begin{Bmatrix} i_{3/B}(rx) & i_{3/B}(tx) \\ \beta_{3/B} & v_{3/B} + R \cos \varphi \\ \gamma_{3/B} & w_{3/B} + R \sin \varphi \end{Bmatrix}_O$$

Paramétrage des défauts des deux plans du vé : torseurs d'écart des plans

Dans le cas du plan, cf. Figure 6, le torseur de petit déplacement est identique à celui utilisé en métrologie, complété des composantes indéterminées.

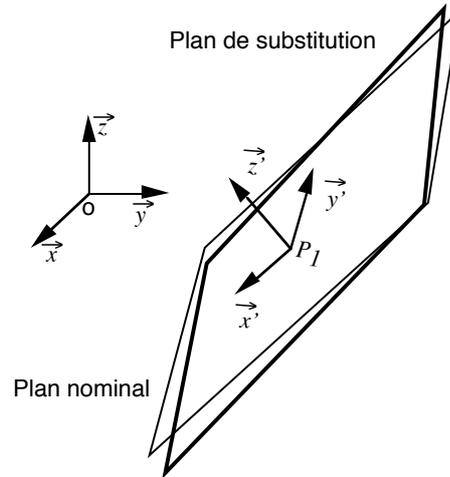


Figure 6 : paramétrage du torseur d'écart du plan 1

D'où, d'après les considérations précédentes, le torseur d'écart du plan 1 dans le repère R' (propre à la surface) (3) puis dans le repère R du montage (4).

$$T_{1/A} = \begin{Bmatrix} \alpha_{1/A} & i_{1/A}(tx) \\ \beta_{1/A} & i_{1/A}(ty) \\ i_{1/A}(rz) & w_{1/A} \end{Bmatrix}_{P_1} \quad (3)$$

$$T_{1/A} = \begin{Bmatrix} \alpha_{1/A} & i_{1/A}(tx) \\ -i_{1/A}(rz) \cos \theta + \beta_{1/A} \sin \theta & i_{1/A}(ty) \sin \theta - w_{1/A} \cos \theta \\ \beta_{1/A} \cos \theta + i_{1/A}(rz) \sin \theta & i_{1/A}(ty) \cos \theta + w_{1/A} \sin \theta \end{Bmatrix}_{P_1} \quad (4)$$

On définit un torseur d'écart, symétrique de celui-ci, pour le deuxième plan du vé. Ceci achève, pour notre exemple, le paramétrage des surfaces utiles au cas du positionnement par le vé.

Torseurs de petits déplacements des pièces

Chaque pièce est susceptible de se déplacer par rapport à sa position théorique, c'est-à-dire dans le cas des pièces aux cotes nominales, sous les effets conjoints des défauts de chaque pièces et des jeux dans les liaisons. La prise en compte de ces déplacements est réalisée par l'association d'un torseur de petit déplacement à six composantes inconnues à chaque solide du mécanisme ou du montage d'usinage considérés. On a donc pour les solides A et B dans un référentiel R un torseur générique qui prend la forme des expressions (5) en un point o quelconque de l'espace.

$$T_{A/R} = \begin{Bmatrix} \alpha_{A/R} & u_{A/R} \\ \beta_{A/R} & v_{A/R} \\ \gamma_{A/R} & w_{A/R} \end{Bmatrix}_o \quad \text{et} \quad T_{B/R} = \begin{Bmatrix} \alpha_{B/R} & u_{B/R} \\ \beta_{B/R} & v_{B/R} \\ \gamma_{B/R} & w_{B/R} \end{Bmatrix}_o \quad (5)$$

Ainsi, le petit déplacement du vé représenté par la figure 7, ne fait absolument pas, pour l'instant, référence aux défauts de la pièce ou des autres pièces, il s'applique à la forme nominale géométriquement parfaite du vé.

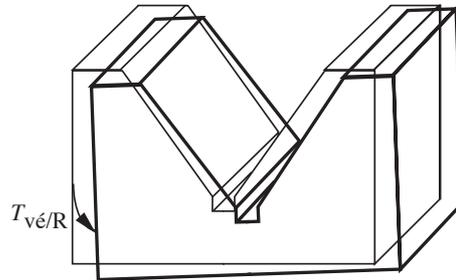


Figure 7 : petit déplacement du vé

Toujours dans un soucis de simplification des calculs, nous considérerons ici le vé parfaitement situé en orientation et en position par rapport au référentiel R.

La description des pièces constitutives du mécanisme est maintenant achevée. Le calcul des chaînes de causalité des écarts à travers le montage nécessite néanmoins une étape supplémentaire : le calcul de la forme des torseurs jeux.

Torseurs jeux

Torseur jeu entre les surfaces 3 de l'arbre et 1 du vé au point C1 dans le repère R' puis R défini par la figure 8.

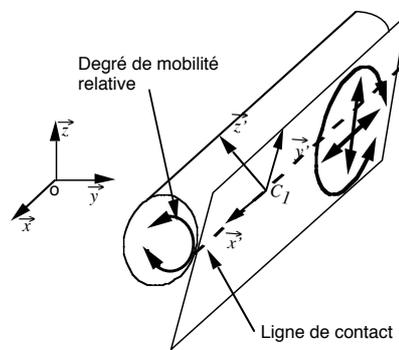


Figure 8 : liaison entre le plan 1 et l'arbre 3

Le torseur jeu entre 3 et 1 est de la forme :

$$T_{3/1} = \begin{Bmatrix} \text{Ind}J_{3/1}(rx) & \text{Ind}J_{3/1}(tx) \\ J_{3/1}(ry) & \text{Ind}J_{3/1}(ty) \\ \text{Ind}J_{3/1}(rz) & J_{3/1}(tz) \end{Bmatrix}_{(x1, R \cos \theta, -R \sin \theta)} \quad (7)$$

On a alors dans R la forme du torseur jeu entre le plan 1 et le cylindre 3 qui s'écrit suivant (8).

$$T_{3/1} = \begin{Bmatrix} \text{Ind}J_{3/1}(rx) & \text{Ind}J_{3/1}(tx) \\ J_{3/1}(ry) \cos \theta - \text{Ind}J_{3/1}(rz) \sin \theta & -J_{3/1}(tz) \sin \theta + \text{Ind}J_{3/1}(ty) \cos \theta \\ J_{3/1}(ry) \sin \theta + \text{Ind}J_{3/1}(rz) \cos \theta & J_{3/1}(tz) \cos \theta + \text{Ind}J_{3/1}(ty) \sin \theta \end{Bmatrix}_{(x1, R \cos \theta, -R \sin \theta)} \quad (8)$$

La définition du torseur jeu entre 3 et 2 est réalisée au point C2 dans le repère R'' puis R de manière identique au torseur jeu précédent. On a alors :

$$T_{3/1} = \left\{ \begin{array}{cc} \text{Ind}J_{3/1}(rx) & \text{Ind}J_{3/1}(tx) \\ J_{3/1}(ry)\cos\theta - \text{Ind}J_{3/1}(rz)\sin\theta & -J_{3/1}(tz)\sin\theta + \text{Ind}J_{3/1}(ty)\cos\theta \\ J_{3/1}(ry)\sin\theta + \text{Ind}J_{3/1}(rz)\cos\theta & J_{3/1}(tz)\cos\theta + \text{Ind}J_{3/1}(ty)\sin\theta \end{array} \right\}_{(x1,R\cos\theta,-R\sin\theta)} \quad (9)$$

Pour la suite des calculs, nous considérerons l'axe de l'arbre confondu avec le déplacement de B et les indéterminées des écarts nulles. Ces simplifications permettent de simplifier les expressions sans changer la nature des résultats.

Calcul de la position de l'arbre

Arrivé à ce stade de la démarche, il paraît intéressant de faire un premier bilan. Que connaissons-nous et qu'allons nous déterminer ?

Nous venons de définir le paramétrage nécessaire et suffisant des écarts de chacun des éléments de notre montage pour un calcul de chaîne de cotes tridimensionnelles, nous avons donc formulé notre problème. Nous avons comme paramètres les composantes d'écarts ainsi que les composantes jeux et comme inconnues les petits déplacements des pièces et les composantes de jeux indéterminées. Nous allons donc calculer l'expression des composantes de jeux indéterminées de manière à calculer ensuite la valeur des composantes de petits déplacements des pièces.

Ce calcul fait lui-même appel à deux étapes. Dans un premier temps, nous calculerons la position de l'arbre conséquence des défauts de chacune des liaisons considérées indépendamment, puis nous calculerons le déplacement global.

Composition des petits déplacements issus de chaque liaison

Il nous reste maintenant à mettre cette première étape en équations et à les résoudre. Les équations que nous pouvons écrire sont : les compositions de torseurs de petits déplacements relatives à chacune des liaisons. En effet, par composition des torseurs de petits déplacement, on peut écrire pour toute liaison l'égalité (10) suivante :

$$T_{i/B} + T_{B/R} = T_{i/j} + T_{j/A} + T_{A/R} \quad (10)$$

Cette égalité résulte de l'expression de deux manières différentes de la position de la surface i, comme surface de la pièce B et comme surface positionnée par la liaison ij. Dans cet exemple, en isolant le Torseur de B/R, on a, issu de chacune des liaisons, une expression de TB/R, ce qui se traduit par les deux égalités (11) et (12) dans le cas de notre exemple :

$$T_{B/R} = T_{3/1} + T_{1/A} + T_{A/R} - T_{3/B} \quad (11)$$

$$T_{B/R} = T_{3/2} + T_{2/A} + T_{A/R} - T_{3/B} \quad (12)$$

Après résolution des deux équations, on obtient deux expressions (13) et (14) de TB/R, que l'on note $T_{B/R}^{(1)}$ pour la première équation et $T_{B/R}^{(2)}$ pour la deuxième.

$$T_{B/R}^{(1)} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{1/A} + \text{Ind}J_{3/1}(rx) & \text{Ind}J_{3/1}(tx) \\ -\text{Ind}J_{3/1}(rz)\cos\theta + (\beta_{1/A} + J_{3/1}(ry))\sin\theta & (-\Delta R + x1\beta_{1/A} - J_{3/1}(tz) - w_{1/A})\cos\theta + \text{Ind}J_{3/1}(ty)\sin\theta \\ \text{Ind}J_{3/1}(rz)\sin\theta + (\beta_{1/A} + J_{3/1}(ry))\cos\theta & (\Delta R - x1\beta_{1/A} + J_{3/1}(tz) + w_{1/A})\sin\theta + \text{Ind}J_{3/1}(ty)\cos\theta \end{array} \right\}_{C1} \quad (13)$$

$$T_{B/R}^{(2)} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{2/A} + \text{Ind}J_{3/2}(rx) & \text{Ind}J_{3/2}(tx) \\ \text{Ind}J_{3/2}(rz)\cos\theta + (\beta_{2/A} + J_{3/2}(ry))\sin\theta & (\Delta R - x2\beta_{2/A} + J_{3/2}(tz) + w_{2/A})\cos\theta + \text{Ind}J_{3/2}(ty)\sin\theta \\ \text{Ind}J_{3/2}(rz)\sin\theta - (\beta_{2/A} + J_{3/2}(ry))\cos\theta & (\Delta R - x2\beta_{2/A} + J_{3/2}(tz) + w_{2/A})\sin\theta - \text{Ind}J_{3/2}(ty)\cos\theta \end{array} \right\}_{C2} \quad (14)$$

Nous venons d'identifier deux expressions partielles, car issue chacune d'une seule liaison, du déplacement de l'arbre en fonction des défauts de chaque liaison et par rapport au référentiel du vé. Il nous faut donc les unifier et chercher, le cas échéant, les conditions de leur compatibilité.

Expression du petit déplacement de l'arbre

Les expressions (13) et (14) définissent de deux manières différentes le déplacement de l'arbre. Or ces deux définitions du déplacement sont identiques puisqu'il s'agit du déplacement de la même pièce. On définit donc le déplacement de l'arbre B par la relation (15).

$$T_{B/R}^* \equiv T_{B/R}^{(1)} = T_{B/R}^{(2)} \quad (15)$$

Dans la mise en position globale de la pièce, chaque liaison apporte son concours. On cherche donc pour chaque liaison les indéterminées de liaisons qui pourraient être calculées à partir des composantes des autres. L'égalité (15) des deux torseurs qui définit le déplacement de l'arbre, se ramène alors à un ensemble de 6 équations linéaires où les inconnues sont les indéterminées de jeux. Ce système peut donc se mettre sous une forme matricielle (16), que nous noterons de la manière suivante :

$$C \cdot I = D \quad (16)$$

La dimension de ce système, explicité par la relation (17), est de 6 équations pour 8 inconnues. Sa résolution partielle ou totale est réalisée par la méthode du pivot partiel de Gauss.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos\theta & 0 & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \sin\theta & 0 & x_2\sin\theta & R\sin\theta & -x_1\sin\theta & -R\sin\theta \\ \cos\theta & 0 & \cos\theta & 0 & -x_2\cos\theta & -R\cos\theta & -x_1\cos\theta & -R\cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Ind}J_{3/2}(ty) \\ \text{Ind}J_{3/2}(tx) \\ \text{Ind}J_{3/1}(ty) \\ \text{Ind}J_{3/1}(tx) \\ \text{Ind}J_{3/2}(rz) \\ \text{Ind}J_{3/2}(rx) \\ \text{Ind}J_{3/1}(rz) \\ \text{Ind}J_{3/1}(rx) \end{bmatrix} = D$$

et

$$D = \begin{bmatrix} -\alpha_{1/A} + \alpha_{2/A} \\ (-\beta_{1/A} + \beta_{2/A} - J_{3/1}(ry) + J_{3/2}(ry))\sin\theta \\ -(\beta_{1/A} + \beta_{2/A} + J_{3/1}(ry) + J_{3/2}(ry))\cos\theta \\ R(-\beta_{1/A} + \beta_{2/A} - J_{3/1}(ry) + J_{3/2}(ry)) \\ R(\alpha_{1/A} - \alpha_{2/A})\sin\theta + (2\Delta R + x_1J_{3/1}(ry) + x_2J_{3/2}(ry) + J_{3/1}(tz) + J_{3/2}(tz) + w_{1/A} + w_{2/A})\cos\theta \\ (-x_1J_{3/1}(ry) + x_2J_{3/2}(ry) - J_{3/1}(tz) + J_{3/2}(tz) - w_{1/A} + w_{2/A})\sin\theta + R(\alpha_{1/A} + \alpha_{2/A})\cos\theta \end{bmatrix} \quad (17)$$

Après résolution de ce système, on obtient l'expression des indéterminées de jeux en fonction soit :

- des défauts et des jeux d'autres liaisons, ce qui signifie que le degré de mobilité est supprimé par les autres liaisons.
- des défauts, des jeux d'autres liaisons et d'autres indéterminées, ce qui signifie que le degré de mobilité subsiste.

Le système (17) peut très bien dans le cas général, être simultanément, sous contrainte, il n'y a pas suffisamment d'équations pour calculer toutes les indéterminées, et sur contrainte, il existe des conditions de compatibilité. De manière plus concrète, cela signifie qu'il peut subsister des degrés de mobilité dans le montage mais aussi des conditions de montage liées à l'hyperstatisme. Dans le cas de notre exemple, le

système (17) admet une solution sans condition de compatibilité ce qui signifie qu'il ne recèle pas de degré d'hyperstatisme, y compris local.

Après substitution des composantes indéterminées du torseur de petits déplacements (13) par leur ex-pression issue de la résolution de (17), on obtient le petit déplacement consécutif à l'écart de l'axe de l'arbre en un point quelconque de l'espace (ici l'origine). De plus, dans cet exemple, on assigne aux jeux la valeur zéro car il y a un contact entre l'arbre et le vé. En revanche la méthode et les relations qui en découlent se vérifient quelle que soit la valeur des jeux non contraints.

$$T_{B/R}^* = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{IndJ_{3/1}(rx)}{\beta_{1/A} + \beta_{2/A}} & \frac{IndJ_{3/1}(tx)}{-w_{1/A} + w_{2/A}} \\ \frac{2 \sin \theta}{\beta_{1/A} - \beta_{2/A}} & \frac{2 \cos \theta}{\frac{\Delta R}{\sin \theta} + \frac{w_{1/A} + w_{2/A}}{2 \sin \theta}} \end{array} \right\}_o \quad (18)$$

Ce petit déplacement (18) de l'axe de l'arbre apporte deux remarques. Tout d'abord, il subsiste deux composantes indéterminées donc deux degrés de mobilité dans ce montage, ensuite on remarquera qu'en supposant les défauts, autres que le rayon, sont nuls ; on obtient un résultat équivalent à la relation (1) du cas classique.

Exploitation des résultats

Le calcul du petit déplacement de l'axe permet d'obtenir par composition de torseurs d'autres type d'information. Par exemple, le petit déplacement d'un point quelconque de l'arbre paramétré par (x,f) est :

$$T_{B/R}^* + T_{3/B} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{IndJ_{3/1}(rx)}{\beta_{1/A} + \beta_{2/A}} & \frac{IndJ_{3/1}(tx) + \dots}{-w_{1/A} + w_{2/A} - (\Delta R + R \cdot IndJ_{3/1}(rx)) \sin \phi + x \frac{\beta_{1/A} - \beta_{2/A}}{2 \cos \theta}} \\ \frac{2 \sin \theta}{\beta_{1/A} - \beta_{2/A}} & \frac{2 \cos \theta}{\frac{\Delta R}{\sin \theta} + \frac{w_{1/A} + w_{2/A}}{2 \sin \theta} + (\Delta R + R \cdot IndJ_{3/1}(rx)) \cos \phi - x \frac{\beta_{1/A} + \beta_{2/A}}{2 \sin \theta}} \end{array} \right\}_c \quad (19)$$

Ce petit déplacement se projette suivant une direction particulière, par exemple la normale à l'arbre, en effectuant son comoment avec les coordonnées pluckérienne de la normale à l'arbre au point d'expression. On peut alors procéder à diverses vérifications, comme le calcul de la déviation de l'arbre au niveau des lignes de contact avec le vé. On constate alors que l'on obtient la position des plans de substitution, ce qui signifie qu'il y a contact en ces points.

Une condition fonctionnelle s'exprime alors à partir des petits déplacement des pièces, fonction des défauts des surfaces de contact, et des surfaces entre lesquelles elle est exprimée. Pour une condition entre deux surfaces i, de la pièce A, et j, de la pièce B, on a suivant la direction n des coordonnées pluckériennes de la normale choisie et le domaine ∂ des surfaces où s'applique cette condition. On calcule la loi de comportement géométrique par le comoment suivant :

$$cf_{ij}(n, \partial) = \left\{ P_{n, \partial} \right\} \cdot \left\{ T_{i/A} + T_{A/R}^* - T_{j/B} - T_{B/R}^* \right\} \quad (20)$$

La formulation des chaînes de cotes devient ainsi automatique .

À titre d'illustration de l'utilisation de cette méthode, nous allons aborder, à partir du résultat de ces calculs, la question de la coaxialité entre l'axe théorique de l'arbre et celui de substitution. On choisit alors deux critères : l'angle du vé et l'importance relative des défauts de l'arbre et du vé.

On définit pour mesurer l'écart entre l'axe nominal et l'axe de substitution la distance suivante :

$$d = \sqrt{(v_{B/R}^*)^2 + (w_{B/R}^*)^2} \quad (21)$$

À partir du petit déplacement de l'axe défini par le torseur (18), on a dans le plan de l'origine :

$$d = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{-w_{1/A} + w_{2/A}}{\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta R + w_{1/A} + w_{2/A}}{\sin\theta}\right)^2} \quad (22)$$

On peut ainsi pour des niveaux de dispersion fixés à la fois sur le vé et l'arbre chercher à minimiser l'expression (22) en fonction de l'angle ce qui conduit à définir le vé le plus adapté ainsi que la sensibilité de la localisation par rapport à l'angle. Le résultat de l'étude de cette fonction est récapitulé par la figure 9, où R désigne le niveau de défaut du cylindre par rapport à un vé avec des tolérances de 0,01mm.

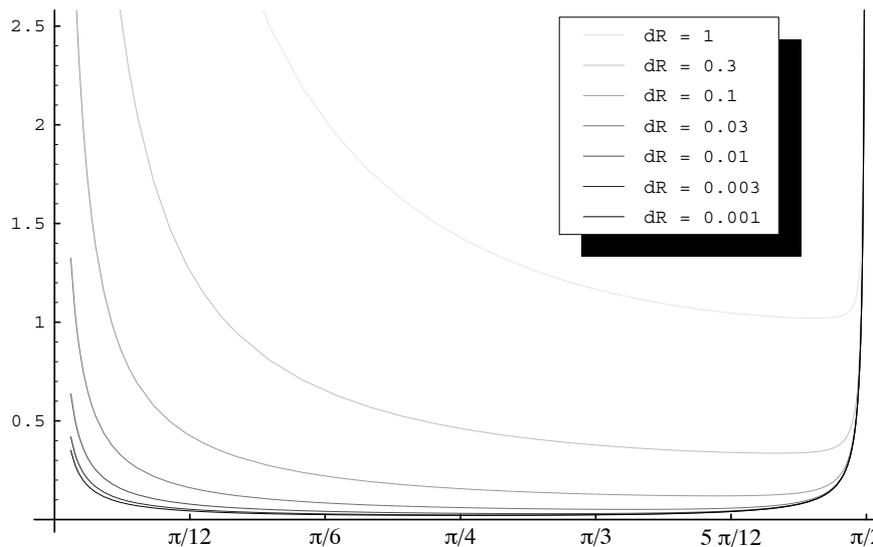


Figure 9 : position de l'axe de l'arbre fonction de l'angle du vé

On constate alors que l'angle optimal varie entre 45° pour un cylindre très précis par rapport au vé à 80° quand le cylindre admet des variations de diamètre très importantes. Enfin, on peut noter que la sensibilité relative de la dispersion autour de l'optimum qui augmente avec le rapport R.

Conclusion

Cet exemple, à la portée volontairement limité pour des raisons de simplicité, a permis d'illustrer sur un cas concret de fabrication une méthode de calcul tridimensionnelle des dispersions géométriques dans les assemblages. Si les calculs peuvent paraître compliqués pour traiter le problème de l'exemple, ils sont à mettre en regard avec le plus grand niveau de précision obtenu et le caractère systématique de la démarche qui permet leur automatisation par un programme informatique. Une maquette d'un tel programme, réalisée avec Mathematica a été largement utilisée pour traiter cet exemple, ce qui permet d'obtenir les résultats très rapidement.

On peut souligner en outre le caractère général de la formulation qui ne limite pas son application à l'étude des montages d'usinage. En effet, on peut mettre en oeuvre ces principes pour l'étude de tout type d'assemblage et en particulier pour la conception des mécanismes et de leur fabrication. Des applications industrielles ont été réalisées dans le cas des assemblages de structures type aéronautique (logiciel Anatole d'EADS-CCR).

Partie 6 : Annexes

Annexe

Présentation du torseur de petit déplacement

Présentation du torseur de petit déplacement [1], [2], [3]

Le principe de cette méthode est basé sur l'utilisation du concept de torseur de petit déplacement (SDT) qui permet de définir en tout point M d'un corps rigide un petit déplacement [1].

Rappelons rapidement la définition et les propriétés du torseur de petit déplacement.

Les déplacements d'un solide peuvent être caractérisés en un point O par un vecteur

Translation \vec{D}_O et une matrice de rotation $\overline{\overline{R}}$. Cette rotation peut être exprimée par trois angles (α, β, γ) représentant les rotations successives autour des trois axes d'un système d'axes (O; $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) lié au solide. La translation d'un point M due aux trois rotations (α, β, γ) caractérisée par les trois matrices de rotation $\overline{\overline{R}}_1, \overline{\overline{R}}_2, \overline{\overline{R}}_3$ s'exprime par la formule : $\overline{\overline{MM'}} = \overline{\overline{R}}' \cdot \overline{\overline{OM}} - \overline{\overline{OM}}$ avec $\overline{\overline{R}}' = \overline{\overline{R}}_3 \cdot \overline{\overline{R}}_2 \cdot \overline{\overline{R}}_1$

La matrice $\overline{\overline{R}}'$ est de la forme :

$$\begin{vmatrix} \cos \gamma \cdot \cos \beta & -\sin \gamma \cdot \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \gamma \cdot \cos \alpha + \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha & \cos \gamma \cdot \cos \alpha - \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha & -\cos \beta \cdot \sin \alpha \\ \sin \gamma \cdot \sin \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha & \cos \gamma \cdot \sin \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha & \cos \beta \cdot \cos \alpha \end{vmatrix}$$

Dans le cas de petites rotations, un développement limité d'ordre un des fonctions angulaires permet d'écrire la matrice $\overline{\overline{R}}'$ sous la forme :

$$\begin{vmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

En posant $\overline{\overline{R}} = \overline{\overline{R}}' - \overline{\overline{1}}$, la translation \vec{D}_M d'un point M quelconque du solide, due aux trois petites rotations (α, β, γ) et à la petite translation au point O, \vec{D}_O s'exprime par la formule :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{D}}_M &= \overline{\overline{D}}_O + (\overline{\overline{R}}' - \overline{\overline{1}}) \cdot \overline{\overline{OM}} \\ \overline{\overline{D}}_M &= \overline{\overline{D}}_O + \overline{\overline{R}} \cdot \overline{\overline{OM}} \end{aligned}$$

Soit

$$\overline{\overline{D}}_M = \overline{\overline{D}}_O + \begin{vmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{vmatrix} \overline{\overline{OM}}$$

Que l'on peut écrire sous la forme vectorielle : $\overline{\overline{D}}_M = \overline{\overline{D}}_O + \overline{\overline{MO}} \wedge \vec{\Omega}$

Avec $\overline{\overline{D}}_O$ (u, v, w) vecteur de translation du solide au point O, et $\vec{\Omega}$ (α, β, γ) vecteur de rotation du solide

Le couple de vecteurs : $\{\overline{\overline{D}}_O, \vec{\Omega}\}$ constitue un torseur que l'on appelle torseur de petit déplacement. Le déplacement $\overline{\overline{D}}_M$ de tout point M d'un solide sera déduit du déplacement au point O par la formule fondamentale $\overline{\overline{D}}_M = \overline{\overline{D}}_O + \overline{\overline{MO}} \wedge \vec{\Omega}$, la rotation $\vec{\Omega}$ étant un invariant du mouvement d'un solide.

Références

- [1] Bourdet P. and Clément A., *Controlling a complex surface with a 3 axis Measuring Machine*, 1976, Annals of the CIRP, Vol. 25, pp. 359-364.
- [2] Bourdet P. and Clément A. (1988) *A study of optimal-criteria identification based on the small-displacement screw model*. Annals of the CIRP, Vol. 37, pp. 503-506.
- [3] Bourdet P., Mathieu L., Lartigue C., Ballu A., 1995, *The concept of the small displacement torsor in metrology*, In Proceedings of the International Euroconference on Advanced Mathematical Tools in Metrology

QUELQUES REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

PARTIE 1 : Chaine de cotes unidirectionnelles

P. BOURDET

" Chaines de cotes de fabrication (Méthode des « delta 1 »): première partie Modèles ",
L'Ingénieur et le Technicien de l'Enseignement Technique. Décembre 1973.

P. BOURDET

Chaines de cotes de fabrication (Méthode des « delta 1 »): deuxième partie Mode
opérateur » L'Ingénieur et le Technicien de l'Enseignement Technique. Mai 1975.

P. BOURDET

Optimisation des méthodes de cotation et de tolérancement en fabrication mécanique.
Journée du GAMI, Paris 30 mai 1975

D. FAINGUELERNT, R. WEILL, P. BOURDET

Computer aided tolerancing and dimensioning in process planning, Annals of the CIRP
, Vol. 35, Manufacturing Technology, Janv.1986

P. BOURDET, J. REMY-VINCENT, F. SCHNEIDER

Tolerance analysis in manufacturing, CIRP International Working Seminar on
Computer-aided Tolerancing - PENNSTATE UNIVERSITY, 16-17 Mai 1991

F. VILLENEUVE, O. LEGOFF, P. BOURDET

Three dimensional geometrical tolerancing in process planning, 32nd CIRP International
seminar on Manufacturing Systems, Leuven (Belgium), pp. 469-478, May 1999

ISO 406 (1987) – NFISO 406 (1995)

Spécification géométrique des produits (GPS) AFNOR pages 217-224

PARTIE 2 : Les montages d'usinage

P. BOURDET, A. CLEMENT

"Optimalisation des montages d'usinage. Contrat de Recherche" D.R.M.E. 1972/811

NORELEM

Catalogue vert (éléments standard mécaniques) <http://www.norelem.com/>

PARTIE 3 : Identification des paramètre de réglage en production

P. BOURDET

Choix et optimalisation des cotes de réglage, 3ème journées scientifique et techniques de
la production automatisée juin 81 (Mécanique Matériaux Electricité N° 388 - Avril
1982).

M. PILLET

Un nouvel indicateur de capabilité Cpm, Technologie et Formation, No. 60, 1995, pp.
36-40.

PARTIE 4 : Compensation des défauts géométriques des machines

A. CLEMENT, P. BOURDET

"Commande adaptative dimensionnelle d'une machine à mesurer tridimensionnelle"
Annals of the CIRP ,Vol. 30, Manufacturing Technology, pp 429, Janv.1981

P. BOURDET, C. LARTIGUE, J.P. MASSON

"Correction volumique des 21 défauts d'une machine à mesurer tridimensionnelle de type trusquin" MFO - Rapport Fin de contrat N° 91, juil. 1991

H. BLUTEAU, P. BOURDET

"Surveillance, diagnostic et correction des défaillances métrologiques dégradant la qualité des mesures réalisées sur machines à mesurer tridimensionnelles." IDMME 2002, CDRom paper N°F4-1, 10 pages, Clermont-Ferrand Mai 2002

PARTIE 5 : Chaines de cotes 3D

P. BOURDET, E. BALLOT

"Geometrical behavior laws for computer aided tolerancing"
Computer Aided Tolerancing edited by Fumihiko Kimura, published by Chapman & Hill, pp. 119-131, (1995)

E. BALLOT

"Lois de comportement géométrique des mécanismes pour le tolérancement", Thèse de doctorat de l'ENS de Cachan, (1995)

E. BALLOT, P. BOURDET

"Présentation à partir d'un exemple du calcul des chaînes de cotes 3D"
Revue Technologies et Formations, n°68, Paris, 1996/5, pages 23-27

F. THIEBAUT

" Contribution à la définition d'un moyen unifié de gestion de la géométrie réaliste basé sur le calcul des lois de comportement des mécanismes", ", Thèse de doctorat de l'ENS de Cachan, (2001)